Проще всего убедиться в справедливости равенства (2) можно, если отложить вектор $\vec{v}$ от начала координат и разложить его по координатным осям:

$$\vec{v}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \qquad (3)$$

(рис. 72). Заметим, что координаты v_x, v_y, v_z вектора $\vec{v}$ — радиус-вектора точки M — это координаты точки M в заданной системе прямоугольных координат.

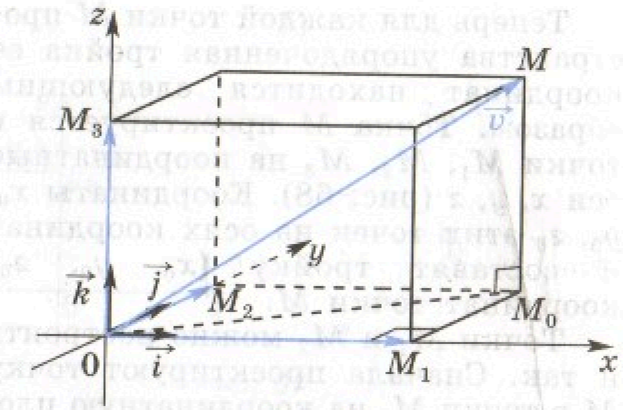


Рис. 72

Если же вектор $\vec{v}$ отложен от произвольной точки A, т. е. $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, то его координаты v_x, v_y, v_z выражаются через координаты его начала $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ и конца $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$ по формулам

$$v_x=x_B-x_A,\quad v_y=y_B-y_A,\quad v_z=z_B-z_A \text{ (рис. 73).} \qquad (4)$$

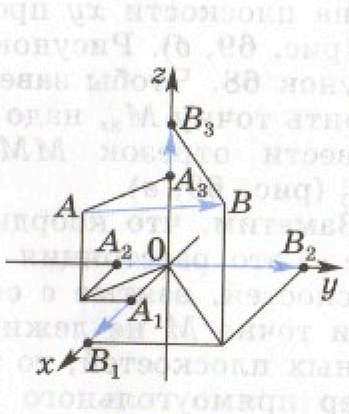


Рис. 73

Если вектор $\vec{v}$ отложен от начала координат: $\vec{v}=\overrightarrow{OM}$, то его модуль (в общем случае) — это длина диагонали OM прямоугольного параллелепипеда с ребрами OM_1, OM_2, OM_3 (рис. 72). Длины этих ребер равны модулям проекций v_x, v_y, v_z вектора $\vec{v}$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам OM_1M_0 и OM_0M, получаем, что $OM^2=OM_1^2+OM_2^2+OM_3^2$. Поэтому

$$|\vec{v}|^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2. \qquad (5)$$

Поскольку модуль вектора $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка AB, то из равенств (4) и (5) вытекает формула для расстояния между точками $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ и $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$:

$$|AB|=((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2)^{0,5}. \qquad (6)$$

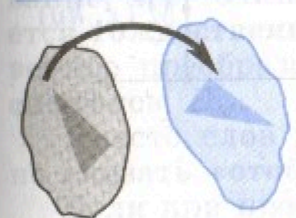
5. Скалярное умножение векторов

Скалярное произведение двух векторов в пространстве определяется, как и на плоскости. Используя формулу (6) и обобщенную теорему Пифагора, выводим формулу для скалярного произведения векторов $\vec{a}\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b}\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (7)$$

Опираясь на эту формулу, выводим свойства скалярного произведения, так же как в п. 23.3.

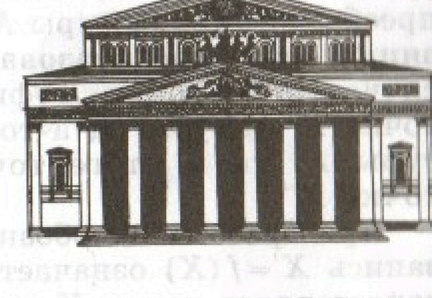
Глава V



Преобразования

§ 26. Движения и равенство фигур

26.1. Преобразования фигур



Одна из первых задач геометрии состоит в том, чтобы дать точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами. Мы решали эту задачу в основном для треугольников. Для более сложных фигур мы пока еще не имеем определения их равенства (хотя, конечно, каждый может отличить равные фигуры от неравных). Реальные построения обычно предполагают построение равных фигур, в частности фигур, обладающих свойствами симметрии. Например, фасады большинства домов симметричны и окна на этих фасадах расположены в правильном порядке. Как начертить план такого фасада или как, начертив на плане одно из окон, получить на плане же изображения остальных окон? Решение таких задач связано с преобразованием фигур.

Пусть задана некоторая фигура F и каждой точке фигуры F сопоставлена (ставится в соответствие) единственная точка плоскости. Множество точек, сопоставленных точкам фигуры F, является некоторой фигурой F', вообще говоря, отличной от F (рис. 74). Говорят, что фигура F' получена **преобразованием фигуры** F. Можно сказать также, что фигура F' является **образом фигуры** F для данного преобразования. Фигуру F называют **прообразом фигуры** F'.

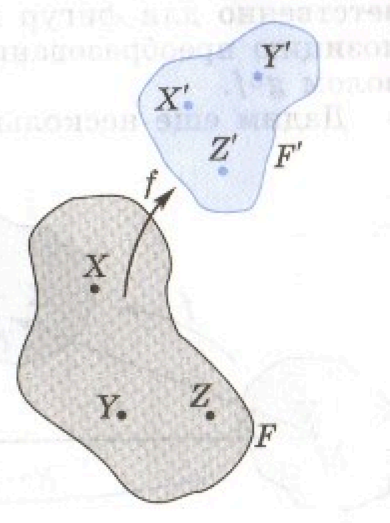


Рис. 74

Если X' — точка фигуры F', соответствующая точке X фигуры F, то говорят, что X' — **образ точки** X, а о точке X говорят, что она является **прообразом точки** X'.

Приведем простой пример. Введем на плоскости прямоугольные координаты и каждой точке $M(x, y)$ поставим в соответствие точку M' с координатами $x'=x$ и $y'=ky$, где постоянная $k>0$ (рис. 75, *а*). Получим преобразование плоскости, которое называется **сжатием** к оси x с коэффициентом k. Если $k>1$, то его называют **растяжением**. При таком преобразовании образом окружности F, заданной уравнением $x^2+y^2=r^2$, будет эллипс F', заданный уравнением $(x')^2+\left(\frac{y'}{k}\right)^2=r^2$ (рис. 75, *б*). Именно в этом смысле в п. 25.7 мы и говорили, что эллипс получается сжатием из окружности.

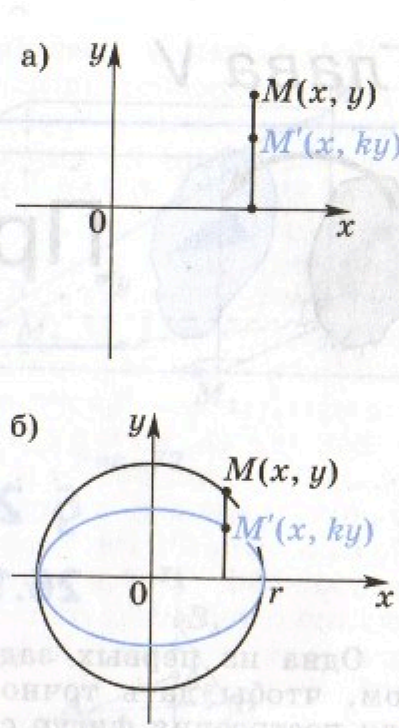


Рис. 75

Часто два или более преобразований выполняют последовательно. Если фигура M преобразуется в фигуру N, а затем фигура N преобразуется в фигуру P, то в результате получается преобразование фигуры M в фигуру P — **композиция двух преобразований** (рис. 76). В этом случае если точке X фигуры M сопоставлена точка X' фигуры N, а точке X' — точка X'' фигуры P, то в итоге точке X сопоставляется точка X''.

Преобразования обозначаются как функции: запись $X'=f(X)$ означает, что преобразование f сопоставляет точке X точку X'. Так же пишут $N=f(M)$ — фигура N получена из фигуры M преобразованием f.

Если происходит сначала преобразование f, а затем преобразование g, то для точек пишут $X''=g\circ f(X)$, т. е. $X''=g(X')$, где $X'=f(X)$. Соответственно для фигур пишут $P=g\circ f(M)$, а композицию преобразований f и g обозначают символом $g\circ f$.

Дадим еще несколько определений.

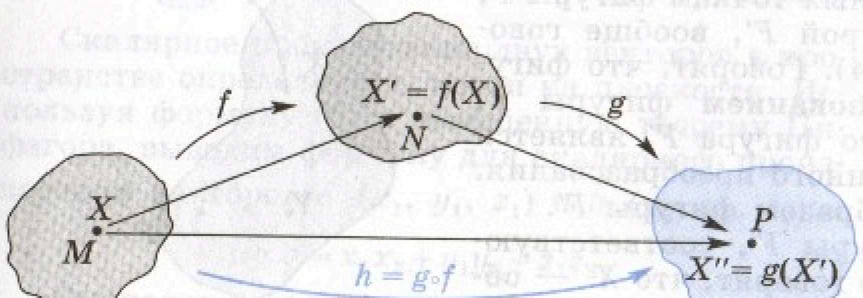


Рис. 76

Неподвижной точкой преобразования f называется такая точка A, что $f(A)=A$. Преобразование, все точки которого неподвижны, называется **тождественным преобразованием**. Тождественное преобразование фигуры M обозначается символом E_M.

Вместо слов «преобразование фигуры» можно сказать **«отображение фигуры»**.

Если при преобразовании разным точкам фигуры соответствуют разные образы, то это преобразование называют **взаимно однозначным**.

Введем еще одну операцию для взаимно однозначных преобразований. Пусть фигура N получена из фигуры M взаимно однозначным преобразованием f. В этом случае можно задать преобразование, **обратное преобразованию** f. Оно определяется так: если при данном преобразовании f точке X сопоставляется точка X' (рис. 77, *а*), то при обратном преобразовании точке X' сопоставляется точка X. (Если бы преобразование f каким-то двум точкам X и Y сопоставляло одну и ту же точку X', то преобразования, обратного преобразованию f, задать было бы нельзя: неизвестно, какую из точек X или Y сопоставить точке X'; рис. 77, *б*.)

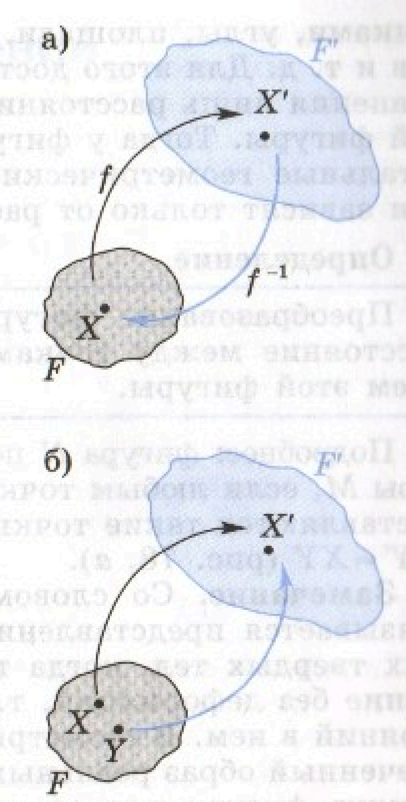


Рис. 77

Преобразование, обратное данному преобразованию f, обозначается f^{-1}. Так что если $X'=f(X)$, то $X=f^{-1}(X')$. Поэтому $f^{-1}\circ f(X)=X$, т. е. $f^{-1}\circ f=E$. Аналогично $f\circ f^{-1}=E$.

Кроме того, очевидно, что *обратное обратному преобразованию есть данное преобразование*, т. е. $(f^{-1})^{-1}=f$. Поэтому преобразования f и f^{-1} называют **взаимно обратными**. Каждое из них обратно другому, и все равно, какое из них считать исходным, а какое — обратным.

Преобразование, для которого существует обратное, называют **обратимым**. Оно, как мы видим, характеризуется тем, что при нем разным точкам сопоставляются разные точки. Поэтому обратимость существует лишь для взаимно однозначных преобразований.

26.2. Движения фигур

Самыми важными являются такие преобразования фигур, при которых сохраняются все их геометрические свойства: расстояния между точками, углы, площади, параллельность отрезков и т. д. Для этого достаточно потребовать сохранения лишь расстояний между точками данной фигуры. Тогда у фигуры сохраняются и все остальные геометрические свойства, поскольку они зависят только от расстояний.

Определение.

Преобразование фигуры, которое сохраняет расстояние между точками, называется **движением** этой фигуры.

Подробнее: фигура N получена движением фигуры M, если любым точкам X, Y фигуры M сопоставляются такие точки X', Y' фигуры N, что $X'Y' = XY$ (рис. 78, *а*).

Замечание. Со словом «движение» обычно связывается представление о движениях реальных твердых тел, когда тело меняет свое положение без деформаций, т. е. без изменений расстояний в нем. В геометрии движение — это отвлеченный образ реальных движений. Геометрическую фигуру нельзя передвинуть в буквальном смысле слова. Рисунок на бумаге тоже нельзя передвинуть, это можно проделать с самой бумагой, но не с рисунком на ней (рис. 78, *б*).

а) б)

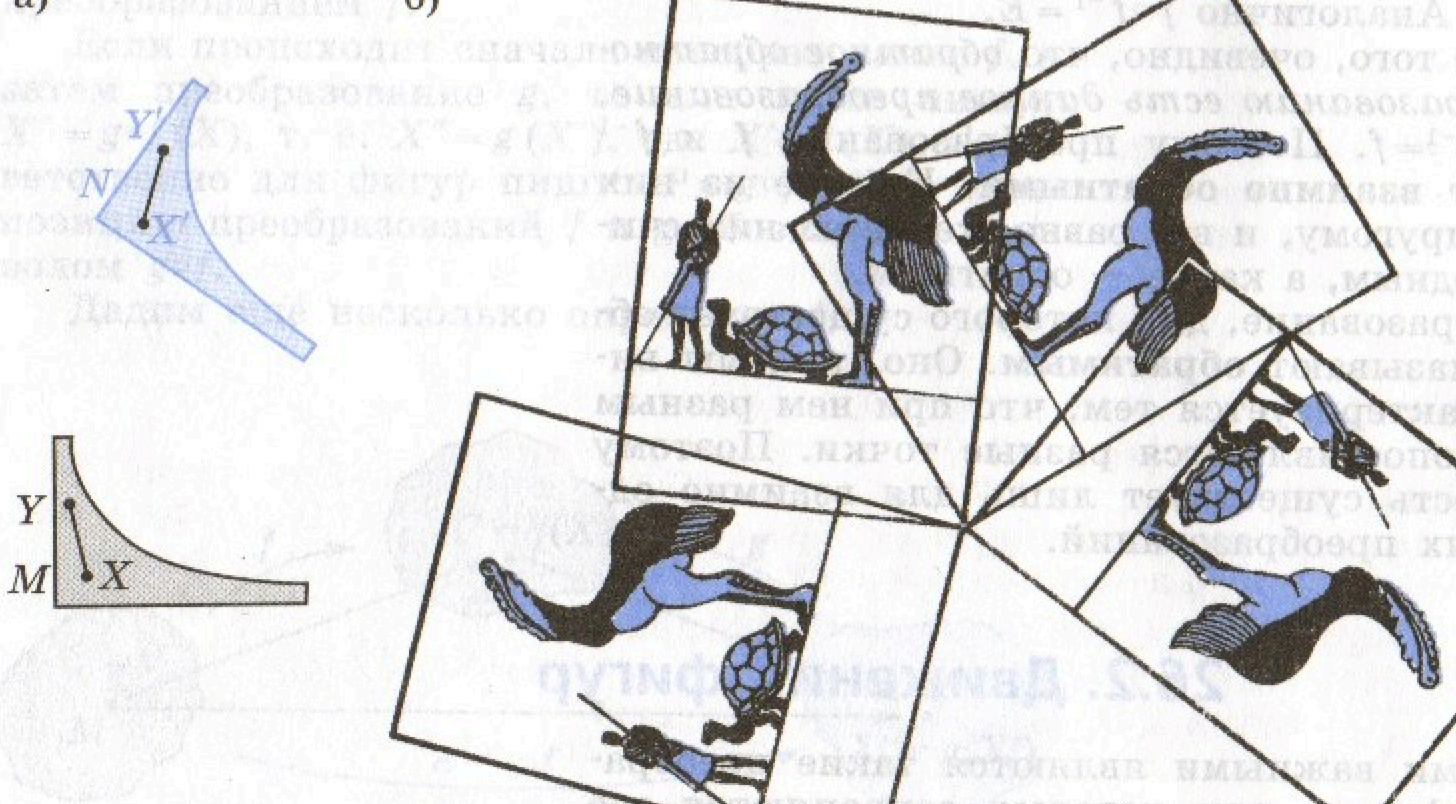


Рис. 78

26.3. Свойства движений

Докажем самые важные свойства движений.

Свойство 1.

Три точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, лежащие на одной прямой, и три точки, не лежащие на одной прямой,— в три точки, не лежащие на одной прямой.

Доказательство. Пусть движение переводит соответственно точки A, B, C в точки A', B', C'. Тогда выполняются равенства

$$A'B' = AB,\quad A'C' = AC,\quad B'C' = BC. \qquad (1)$$

Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то одна из них, например точка B, лежит между двумя другими. В этом случае $AB + BC = AC$, и из равенства (1) следует, что $A'B' + B'C' = A'C'$. А это равенство означает, что точка B' лежит между точками A' и C'. Первое утверждение доказано. ■

Второе утверждение докажите самостоятельно (способом от противного).

Свойство 2.

Отрезок движением переводится в отрезок.

Доказательство. Пусть концам отрезка AB движение f сопоставляет точки A' и B'. Возьмем любую точку X отрезка AB. Тогда, как и в доказательстве свойства 1, можно установить, что ее образ — точка $X' = f(X)$ лежит между точками A' и B', т. е. на отрезке $A'B'$. Далее, каждая точка Y' отрезка $A'B'$ является образом некоторой точки Y отрезка AB, а именно той точки Y, которая удалена от точки A на расстояние $A'Y'$ (объясните почему). Следовательно, отрезок AB движением f переводится в отрезок $A'B'$. ■

Свойство 3.

При движении луч переходит в луч, прямая — в прямую.

Эти утверждения докажите самостоятельно.

Свойство 4.

Треугольник движением переводится в треугольник.

Доказательство. Треугольник ABC заполняется отрезками, соединяющими вершину A с точками X противоположной стороны BC (рис. 79, *а*). Движение сопоставит отрезку BC некоторый отрезок $B'C'$ и точке A точку A', не лежащую на прямой $B'C'$. Каждому отрезку AX это движение сопоставит отрезок $A'X'$, где точка X' лежит на $B'C'$. Все эти отрезки $A'X'$ заполнят треугольник $A'B'C'$. В него и переходит треугольник ABC. Проведите это рассуждение подробнее. ■

Свойство 5.

Движение сохраняет величины углов.

Подробнее: если точкам A, B, C, не лежащим на одной прямой, движение сопоставляет точки A', B', C', то $\angle B'A'C' = \angle BAC$.

Доказательство. В силу равенств (1) $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$. Поэтому $\angle B'A'C' = \angle BAC$ (рис. 79, *б*).

Итак, движение сохраняет углы, а значит, и перпендикулярность. Поэтому высота треугольника движением переводится в высоту треугольника — образа. Длина высоты, как и длина основания треугольника, как полагается при движении, сохраняется. Значит, движение сохраняет площадь треугольника. И не только треугольника. Многоугольные фигуры составляются из треугольников, а потому справедливо такое свойство:

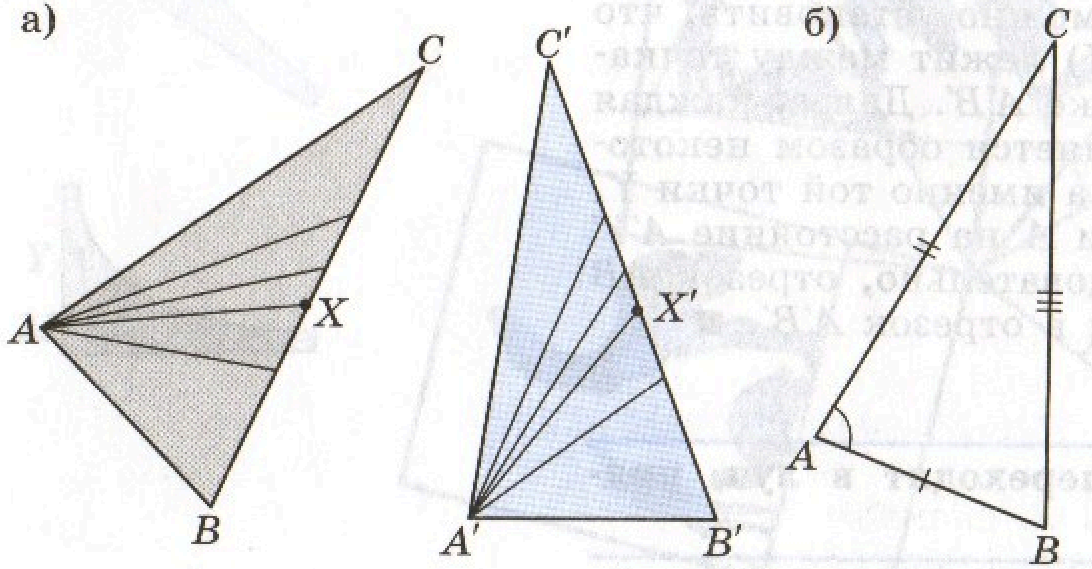


Рис. 79

Свойство 6.

При движении сохраняются площади многоугольных фигур.

Из определений движения и обратимого преобразования непосредственно вытекает еще одно свойство движений:

Свойство 7.

Движение обратимо. Преобразование, обратное движению, является движением.

Убедитесь в этом.

26.4. Равенство фигур

Свойства движений показывают, что две фигуры, полученные одна из другой движением, совершенно одинаковы. Но в геометрии вместо «одинаковы» говорят «равны» и дается определение:

Две фигуры равны, если между их точками есть соответствие, сохраняющее расстояния.

Другими словами, *фигура F' равна фигуре F, если фигуру F' можно получить некоторым движением фигуры F.*

На практике сравнивают предметы, тоже сравнивая в них соответствующие расстояния. Только говорят обычно не о расстояниях, а о соответствующих размерах предметов. При этом в отличие от теории никто не сравнивает предметы так, чтобы каждой точке одного предмета сопоставлять точку другого предмета. На деле сравнивают только те расстояния между точками, которые играют определяющую роль для этих предметов. И у геометрических фигур сравнивают только те размеры фигуры, которые ее однозначно задают. Например, в четырехугольниках сравнивают только длины сторон и диагонали, а у кругов — только радиусы.

Для треугольников определяющими размерами служат расстояния между вершинами —

длины сторон. Поэтому *равными можно называть треугольники, длины сторон которых соответственно равны.* Аналогично можно было бы определить и равенство многоугольников. Для них определяющими размерами будут длины сторон и диагоналей. Поэтому можно дать определение: *многоугольники равны, если равны их соответствующие стороны и диагонали.*

Когда же мы обращаемся к произвольным фигурам, то неизвестно, расстояния между какими точками можно считать определяющими эти фигуры. Поэтому в общем определении равенства фигур говорится о любых точках.

Вопросы

1. Приведите примеры преобразований реальных фигур.
2. В чем заключается преобразование фигуры?
3. Знаете ли вы, что такое: а) образ фигуры; б) прообраз фигуры; в) обратимое преобразование; г) обратное преобразование; д) композиция преобразований; е) тождественное преобразование?
4. В чем заключается движение фигуры?
5. Какие свойства фигур сохраняются при движениях?
6. Какие фигуры называются равными?

Задачи к § 26

Разбираемся в решении

26.1 **2** Пусть f — движение, A и B — фигуры на плоскости. Докажите, что: а) $f(A \cap B)=f(A) \cap f(B)$; б) $f(A \cup B)=f(A) \cup f(B)$. Верны ли эти равенства не только для движения?

Решение. а) Изобразим условно фигуры A и B так, как на рисунке 80, *а*. Их общая часть — пересечение A и B, обозначаемое $C=A \cap B$, — заштрихована.

Пусть в результате движения f образом фигуры A является фигура A_1, т. е. $A_1=f(A)$, а образом фигуры B — фигура B_1, т. е. $B_1=f(B)$. Условно изобразим фигуры A_1 и B_1 на рисунке 80, *б*. Их общая часть C_1 — пересечение A_1 и B_1 — заштрихована.

Требуется доказать, что $f(C)=C_1$. В этом равенстве слева и справа стоят множества. Чтобы доказать равенство двух множеств, обычно доказывают два утверждения: 1) любой элемент из первого множества принадлежит второму множеству; 2) любой элемент из второго множества принадлежит первому множеству.

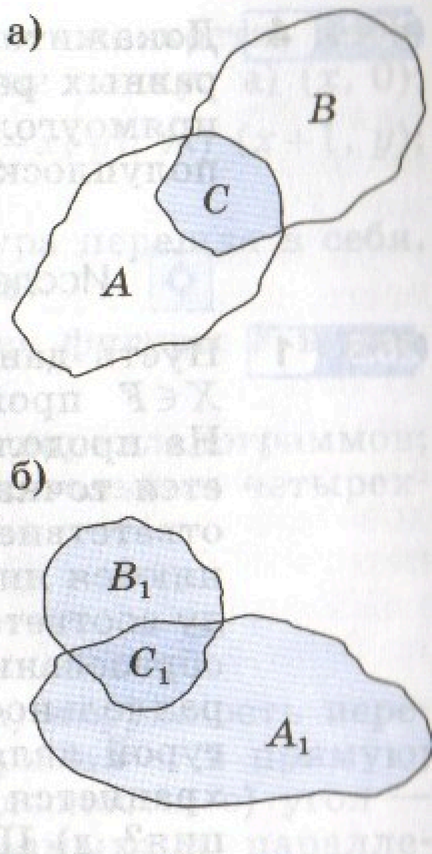


Рис. 80

Докажем первое утверждение. Возьмем любую точку X из множества $C=A \cap B$. Но тогда точка X принадлежит и множеству A, и множеству B. Так как точка X принадлежит множеству A, то ее образ X_1 принадлежит множеству A_1 (?). Точно так же точка X_1 принадлежит множеству B_1. Получилось, что точка X_1 принадлежит как множеству A_1, так и множеству B_1. Значит, она принадлежит их пересечению C_1.

Докажем второе утверждение. Пусть точка Y_1 принадлежит множеству $C_1=A_1 \cap B_1$. Тогда она принадлежит как множеству A_1, так и множеству B_1. Любая точка из множества A_1 является образом некоторой точки, принадлежащей множеству A, поэтому прообраз точки Y_1 — точка Y — находится в множестве A. Точно так же он находится и в множестве B. Значит, точка Y находится в множестве $C=A \cap B$.

А где в доказательстве использовалось, что f — движение? А если это не понадобилось, то не будет ли это утверждение верно не только для движений, но и для других преобразований?

Смотрим

26.2 **4** Разделите на две равные части фигуру, показанную на рисунке 81.

Доказываем

26.3 **2** При некотором движении f точка A перешла в точку B, а точка B — в точку A. Докажите, что в результате последовательного двукратного выполнения этих движений (т. е. композиции $f \circ f$) хотя бы одна из точек плоскости перейдет в себя.

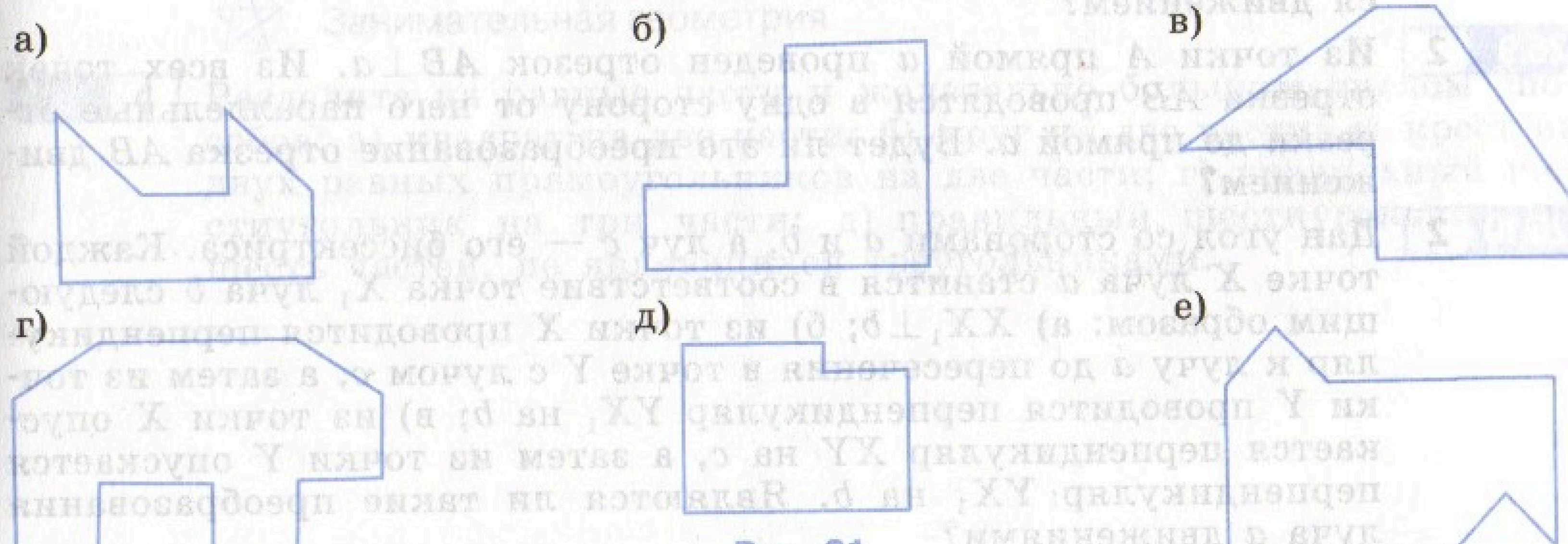


Рис. 81

§ 27. Виды движений

Если на плоскости фигура F' равна фигуре F, то существует некоторое движение, которое переводит F в F' (согласно определению равенства фигур). Оказывается, что на плоскости существует всего лишь четыре вида движений: 1) параллельный перенос (или, короче, перенос; рис. 82, *а*); 2) отражение в прямой (осевая симметрия; рис. 82, *б*); 3) поворот вокруг точки (рис. 82, *в*); 4) «скользящее отражение», состоящее из последовательно выполненных отражения в прямой и переноса вдоль этой прямой (т. е. являющееся композицией этих движений; рис. 82, *г*). Одним из этих движений и переводится F в F'.

27.1. Перенос

Реальным примером фигур, полученных друг из друга параллельным переносом, являются одинаковые окна на фасаде дома (см. с. 97). Начертив на плане одно из окон, можно затем получить любое другое окно, сместив все точки первого в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Это свойство и определяет перенос.

Определение.

Параллельным переносом фигуры называется такое ее преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Подробнее: параллельный перенос произвольным точкам X и Y фигуры сопоставляет такие точки X' и Y', что направленные отрезки $\overrightarrow{XX'}$ и $\overrightarrow{YY'}$ равны по длине и одинаково направлены, т. е. $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ (рис. 83, *а*).

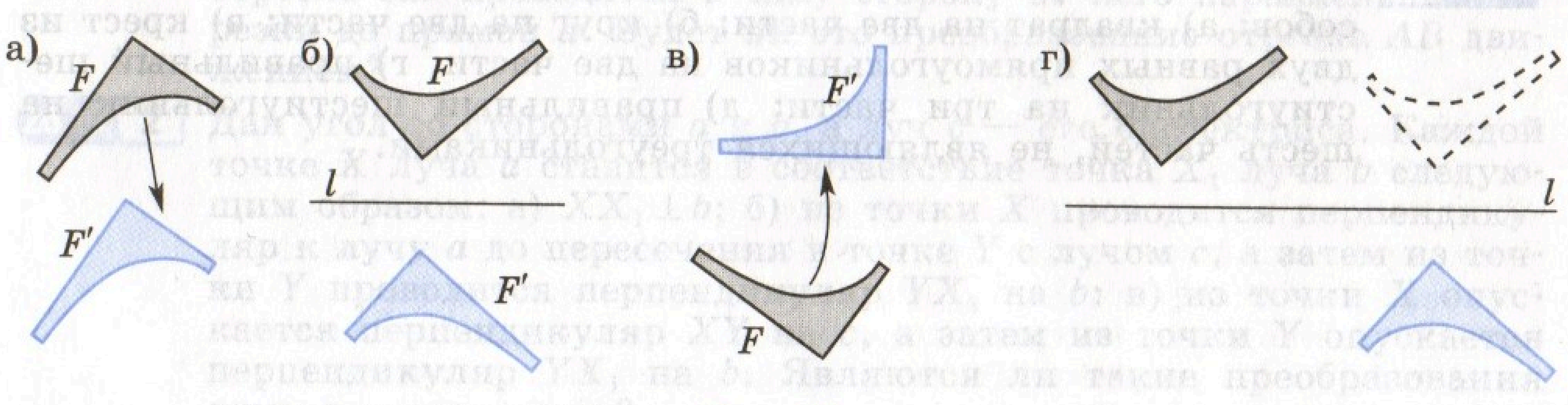


Рис. 82

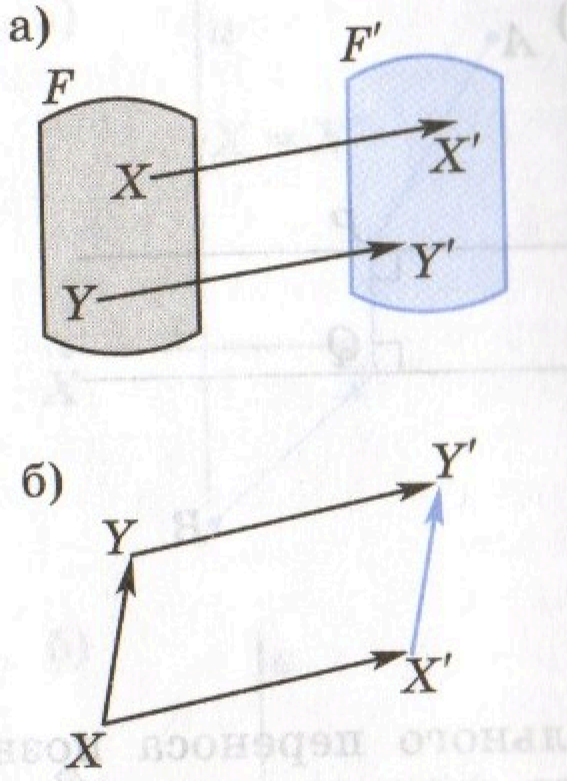


Рис. 83

Равные направленные отрезки представляют один и тот же вектор. Поэтому можно сказать так: параллельный перенос — это преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются на один и тот же вектор — **вектор переноса.** *Параллельный перенос задается вектором переноса:* зная этот вектор, мы знаем, в какую точку перейдет любая точка переносимой фигуры.

Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ обозначается $T_{\vec{a}}$.

Параллельный перенос является движением, которое сохраняет направления. Действительно, пусть при параллельном переносе точки X и Y перешли в точки X' и Y'. Тогда, как следует из определения переноса, выполняется равенство $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ (рис. 83, *б*).

Согласно признаку равенства векторов (теорема 24 п. 18.4) из равенства $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ следует равенство $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$. Поэтому, во-первых, $X'Y'=XY$, т. е. параллельный перенос является движением, а во-вторых, из равенства $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{XY}$ следует, что $\overrightarrow{X'Y'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{XY}$. Это означает, что параллельный перенос сохраняет направления. ■

Доказанное свойство параллельного переноса является характерным его свойством. А именно справедливо утверждение: *движение, сохраняющее направления, является параллельным переносом.* Переведите его на язык векторов и докажите самостоятельно.

27.2. Метод параллельного переноса

Преобразования упрощают решения многих геометрических задач. Основная идея метода геометрических преобразований в том, что фигура, рассматриваемая в условии задачи, преобразуется в такую, для которой решение становится проще. Решив задачу для преобразованной фигуры, затем обратным преобразованием возвращаются к исходной фигуре.

Вместе с тем применение каждого преобразования имеет свои особенности. Метод парал-

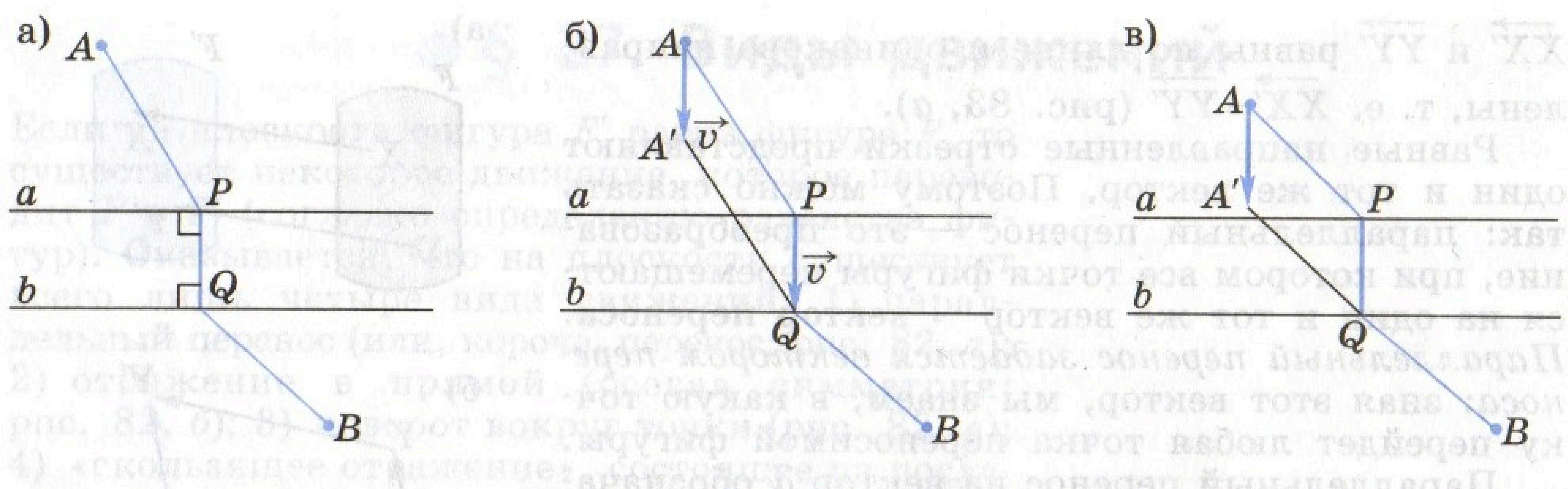


Рис. 84

лельного переноса позволяет сблизить удаленные друг от друга части фигуры и тем упростить задачу.

Вот пример такой **задачи:** где следует построить мост через реку, разделяющую пункты A и B, чтобы путь $l = AP + PQ + QB$ был кратчайшим (рис. 84, *а*)? Берега реки считаются параллельными прямыми a и b, а мост, естественно, строится перпендикулярно берегам реки.

Решение. Заметим, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки P на прямой a, а вектор $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ определяется лишь прямыми a и b (рис. 84, *б*). Поэтому надо найти такое положение точки P, чтобы сумма $AP + QB$ была наименьшей. Пока отрезки AP и QB удалены друг от друга. Поэтому переведем отрезок AP в положение $A'Q$ параллельным переносом на вектор $\vec{v}$. Получим ломаную $A'QB$. И теперь становится ясно, что длина ломаной $A'QB$, а значит, и длина l, будет наименьшей в том случае, когда точки A', Q, B лежат на одной прямой (рис. 84, *в*). Итак, Q — точка пересечения отрезка $A'B$ с прямой b, а P — проекция Q на прямую a.

27.3. Отражение в прямой (Осевая симметрия)

Вы, конечно, знакомы с фигурами, имеющими ось симметрии. Сейчас мы дадим определения осевой симметрии и связанных с ней понятий.

Точки X и X' называются симметричными относительно прямой a, и каждая из них симметричной другой точке, если a является серединным перпендикуляром отрезка XX' (рис. 85, *а*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе (относительно a). Если дана прямая a, то каждой точке X соответствует единственная точка X', симметричная X относительно a.

Определение.

Отражением фигуры в прямой a (или осевой симметрией с осью a) называется такое преобразование этой фигуры, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно прямой a (рис. 85, *б*).

Отражение плоскости в прямой a обозначается S_a.

Фигура F', полученная отражением фигуры F в прямой a, называется **симметричной фигуре F относительно прямой a.**

Поскольку симметричность точек относительно прямой взаимна, то и фигура F симметрична фигуре F' относительно прямой a, т. е. F и F' *симметричны относительно прямой a.* В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно некоторой прямой a (рис. 85, *в*). Тогда говорят, что **фигура симметрична относительно прямой a** и что прямая a является ее **осью симметрии.**

Отражение в прямой является движением.

Чтобы доказать это, применим метод координат. Примем прямую a за ось x прямоугольных координат. Тогда отражение в ней сопоставит точке (x, y) точку $(x, -y)$ (рис. 85, *г*).

Возьмем любые две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и рассмотрим симметричные им относительно оси x точки $A'(x_1, -y_1)$ и $B'(x_2, -y_2)$. Вычислив расстояния $A'B'$ и AB, получим:

$$A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Итак, отражение сохраняет расстояния, т. е. является движением. ■

Отражение в прямой можно наглядно представить как поворот вокруг этой прямой в пространстве. Именно представим себе часть плоскости с данной фигурой F в виде пластинки, на-

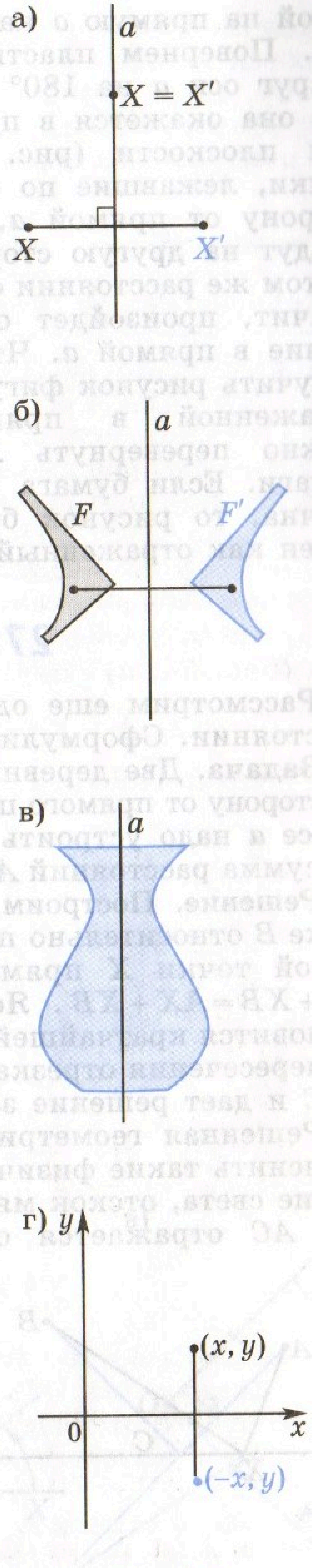


Рис. 85

детей на прямую a как на ось. Повернем пластинку вокруг оси a на 180° так, что она окажется в прежней плоскости (рис. 86). Точки, лежавшие по одну сторону от прямой a, перейдут на другую сторону на том же расстоянии от a. Значит, произойдет отражение в прямой a. Чтобы получить рисунок фигуры, отраженной в прямой, можно перевернуть лист бумаги. Если бумага прозрачна, то рисунок будет виден как отраженный.

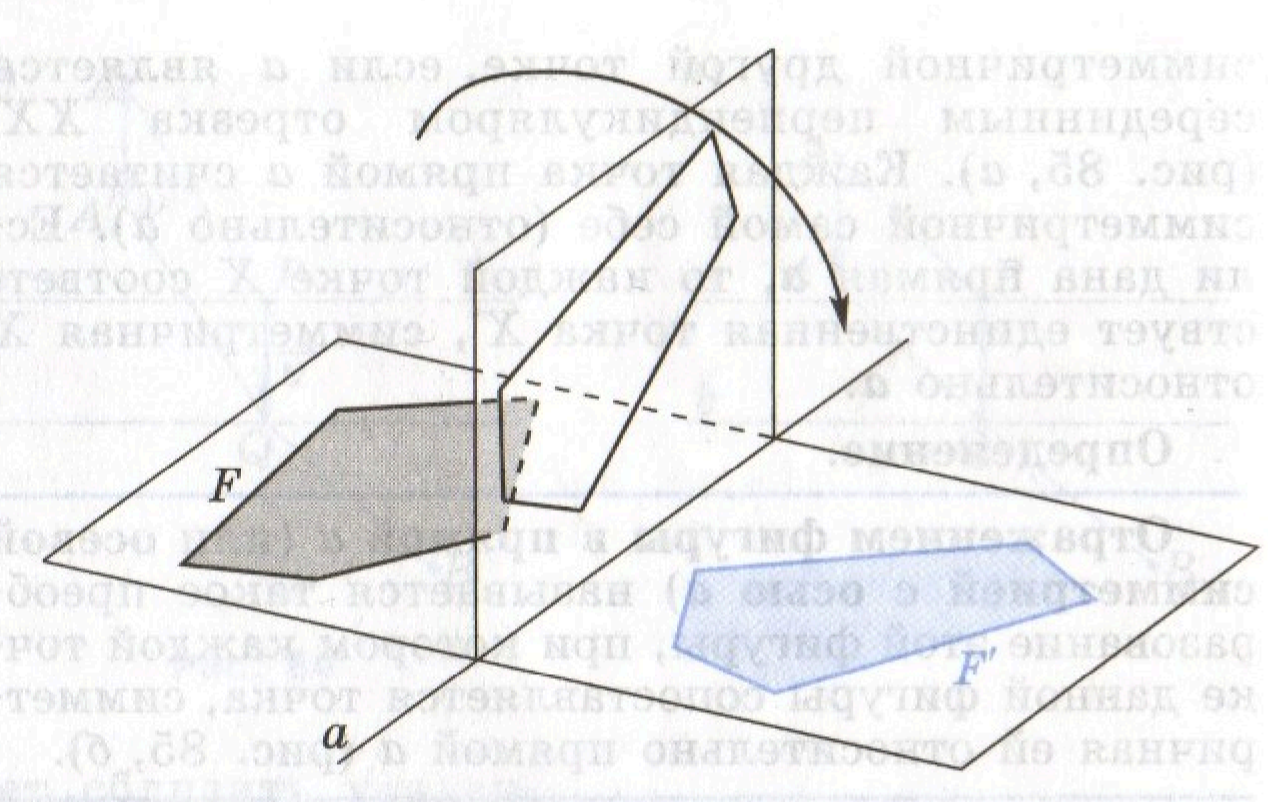


Рис. 86

27.4. Метод симметрии

Рассмотрим еще одну задачу о кратчайшем расстоянии. Сформулируем ее так:

Задача. Две деревни A и B находятся по одну сторону от прямого шоссе a. В какой точке C на шоссе a надо устроить остановку автобуса, чтобы сумма расстояний $AC+CB$ была кратчайшей?

Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. 87, a). Для любой точки X прямой a $BX=B'X$. Поэтому $AX+XB=AX+XB'$. Ясно, что сумма $AX+XB'$ становится кратчайшей, когда X попадает в точку пересечения отрезка AB' с прямой a. Эта точка C и дает решение задачи. ■

Решенная геометрическая задача позволяет объяснить такие физические явления, как отражение света, отскок мяча и т. п. Пусть световой луч AC отражается от прямой a в луч CB

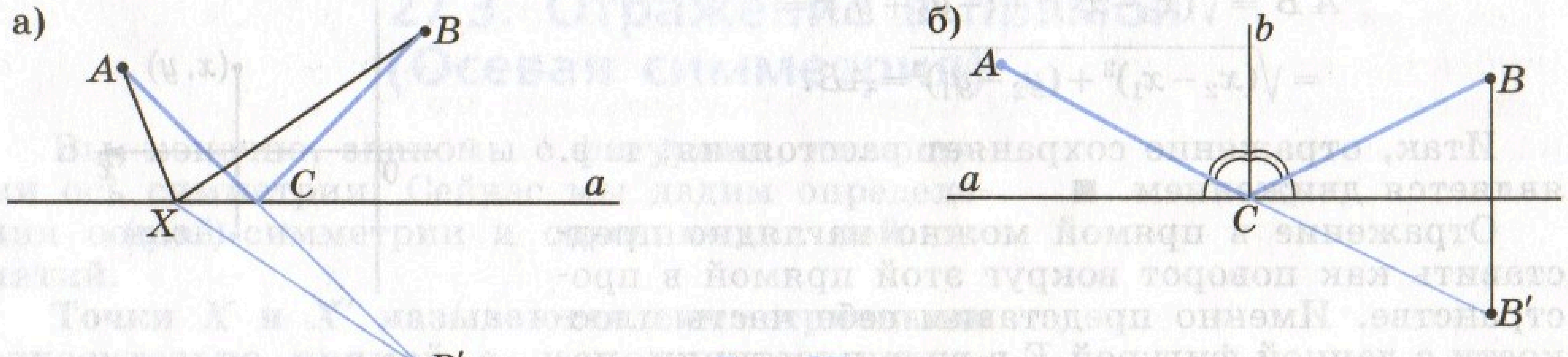


Рис. 87

(рис. 87, $б$). В физике рассматривают углы, которые отрезки AC и BC образуют с перпендикуляром b к прямой a. По закону отражения света угол падения равен углу отражения. А это значит, что свет распространяется из точки A в точку B так, что путь $AC+CB$, а значит, и время его прохождения будут наименьшими. Это так называемый принцип Ферма. Из него вытекают все законы отражения и преломления света. По тому же закону происходят отскоки при упругих ударах (например, мячей, биллиардных шаров и т. п.).

27.5. Поворот

Каждый представляет себе, как повернуть плоский предмет вокруг какой-нибудь точки (например, стрелку часов), и нам нужно только описать это наглядное представление в понятиях геометрии (рис. 88, a).

Пусть дана точка O. На окружности с центром O можно указать два направления обхода — по часовой стрелке и против нее (рис. 88, $б$). Этим задаются также два направления отсчета углов от идущих из точки O лучей — по часовой стрелке и против нее.

Поворот фигуры F вокруг центра O на данный угол $\varphi(0° \leqslant \varphi \leqslant 180°)$ в данном направлении определяется так: каждой точке X фигуры F сопоставляется такая точка X', что, во-первых, $OX'=OX$, во-вторых, $\angle X'OX=\varphi$ и, в-третьих, луч OX' откладывается от луча OX в заданном направлении (рис. 88, $в$).

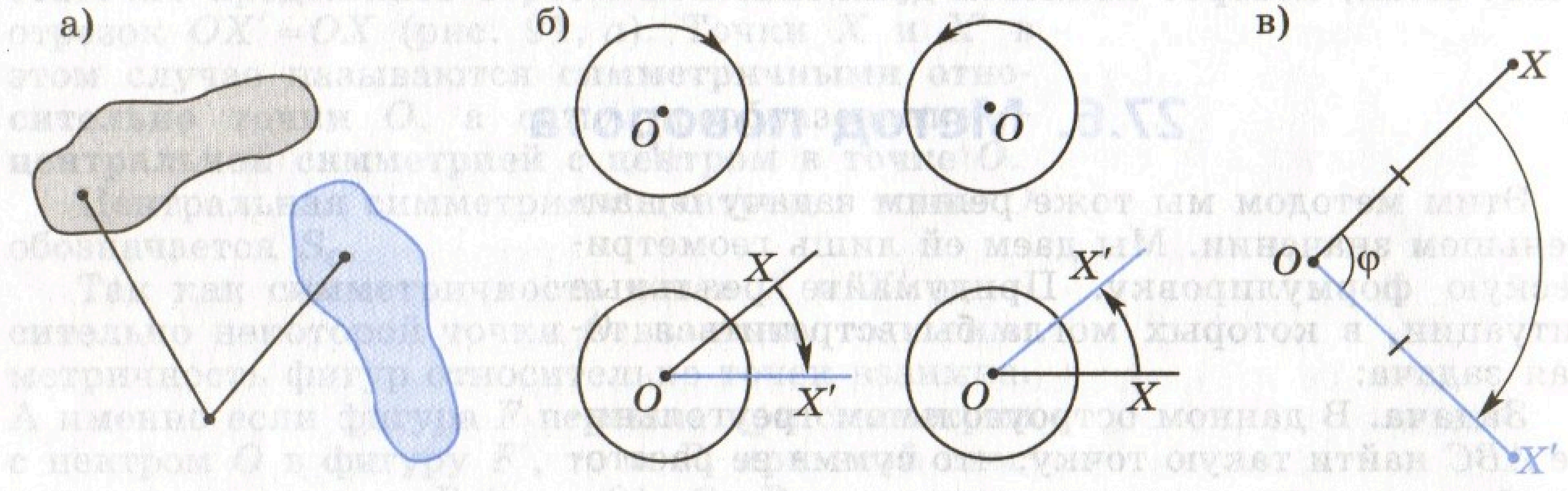


Рис. 88

Можно сказать, что все отрезки OX поворачиваются на один и тот же угол в одну и ту же сторону. Если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама. Точка O называется **центром поворота**, а угол φ — **углом поворота**.

Теорема 32 *(о повороте)*.

Поворот является движением.

Доказательство. Пусть при повороте вокруг точки O точкам X и Y сопоставляются точки X' и Y'. Покажем, что $X'Y' = XY$.

Рассмотрим общий случай, когда точки O, X, Y не лежат на одной прямой. Тогда $\angle X'OY' = \angle XOY$ (рис. 89, *а*). Действительно, пусть угол XOY от OX к OY отсчитывается в направлении поворота. (Если это не так, то рассматриваем угол YOX.) Тогда угол между OX и OY' равен сумме угла XOY и угла поворота (от OY к OY'):

$$\angle XOY' = \angle XOY + \angle YOY'. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\angle XOY' = \angle XOX' + \angle X'OY'. \qquad (2)$$

Так как $\angle XOX' = \angle YOY'$ (как углы поворота), то из этого равенства и равенств (1) и (2) следует, что $\angle X'OY' = \angle XOY$. Кроме того, $OX' = OX$ и $OY' = OY$. Поэтому $\triangle X'OY' = \triangle XOY$. Следовательно, $X'Y' = XY$.

Если точки X, O, Y лежат на одной прямой, то отрезки XY и $X'Y'$ будут либо суммой, либо разностью равных отрезков OX, OY и OX', OY' (рис. 89, *б*, *в*). Поэтому и в этом случае $X'Y' = XY$. Итак, поворот является движением. ■

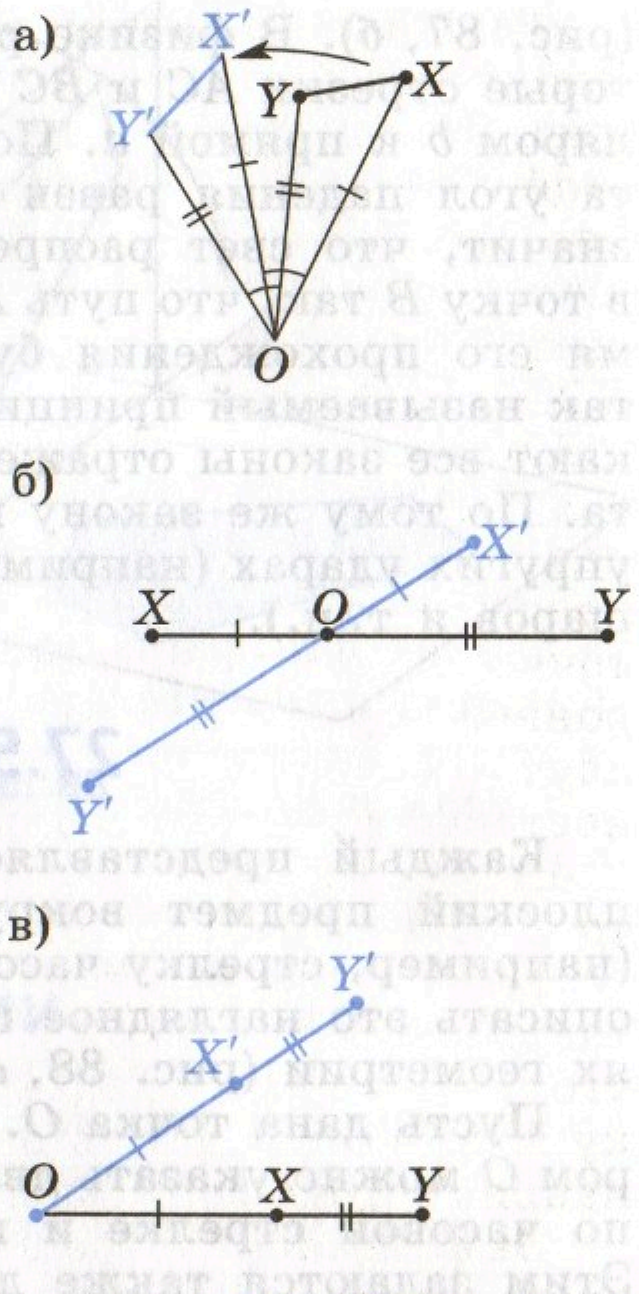


Рис. 89

27.6. Метод поворота

Этим методом мы тоже решим задачу о наименьшем значении. Мы даем ей лишь геометрическую формулировку. Придумайте реальные ситуации, в которых могла бы встретиться такая задача:

Задача. В данном остроугольном треугольнике ABC найти такую точку, что сумма ее расстояний до вершин треугольника наименьшая.

Решение. Возьмем в треугольнике ABC любую точку X и рассмотрим сумму $l = XA + XB + XC$ (рис. 90, *а*). Чтобы найти наименьшее значение этой суммы, надо построить ломаную из отрезков XA, XB, XC. Для этого повернем $\triangle ABX$ вокруг точки A в сторону от $\triangle ABC$ на $60°$. Получим $\triangle AB'X' = \triangle ABX$. Рассмотрим ломаную $B'X'XC$. В ней $B'X' = BX$ и $X'X = XA$ (так как $\triangle AXX'$ равносторонний). Следовательно, $B'X' + X'X + XC = l$. И становится ясно, что l достигает наименьшего значения тогда, когда точки X' и X лежат на отрезке $B'C$ (заметим, что положение точки B' определено — она вершина равностороннего треугольника ABB'; рис. 90, *б*). В этом случае углы $AX'B'$ и AXC — внешние углы равностороннего треугольника AXX'. Поэтому $\angle AXC = \angle AX'B' = 120°$. Так как $\angle AXB = \angle AX'B'$, то $\angle AXB = 120°$. А тогда и $\angle BXC = 120°$.

Итак, l достигает наименьшего значения для такой точки X, из которой все стороны треугольника видны под равными углами. Эту точку X легко построить на отрезке $B'C$, применив, например, параллельный перенос (рис. 90, *в*).

Замечание. Это решение пригодно лишь для треугольников, в которых все углы меньше $120°$. Подумайте, где находится искомая точка, если это условие не выполняется. Добавим, что ее иногда называют точкой Торричелли.

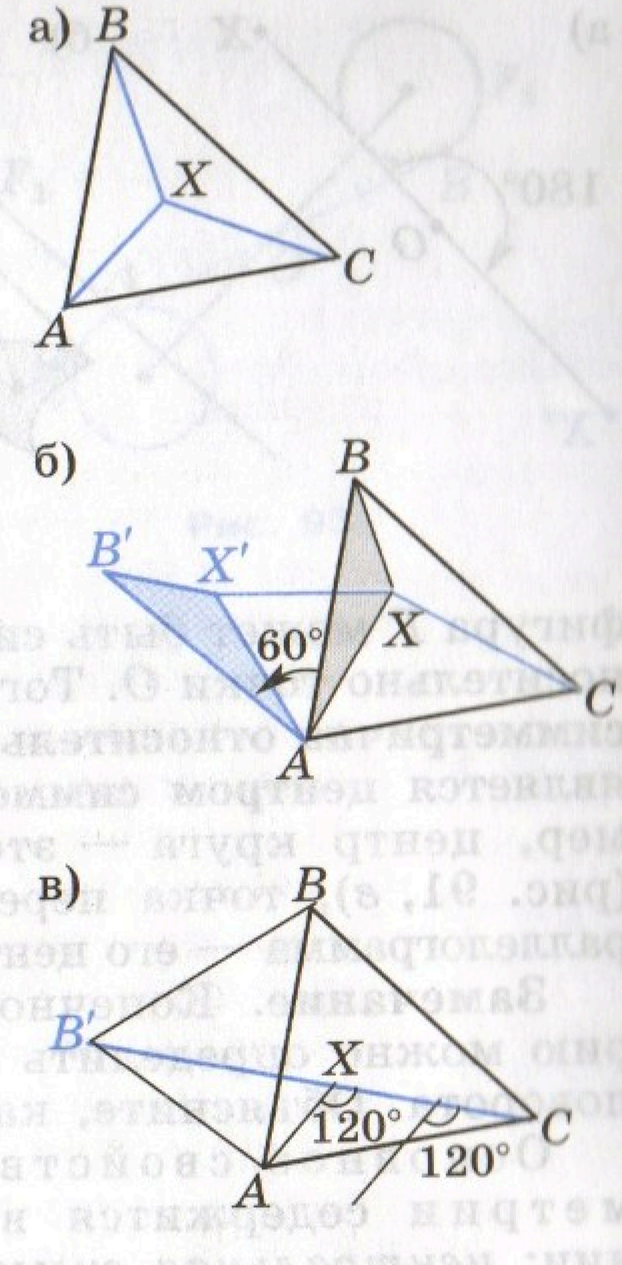


Рис. 90

27.7. Центральная симметрия

Особый случай представляет поворот на $180°$. Если O — центр такого поворота, то, чтобы построить точку X', соответствующую точке X, достаточно продолжить отрезок XO за точку O на отрезок $OX' = OX$ (рис. 91, *а*). Точки X и X' в этом случае называются **симметричными относительно точки O**, а само преобразование — **центральной симметрией с центром в точке O**.

Центральная симметрия с центром в точке O обозначается S_O.

Так как симметричность точек X и X' относительно некоторой точки O взаимна, то и симметричность фигур относительно точек взаимна. А именно если фигура F перешла при симметрии с центром O в фигуру F', то и F' при этой симметрии перешла в F (рис. 91, *б*). В частности,

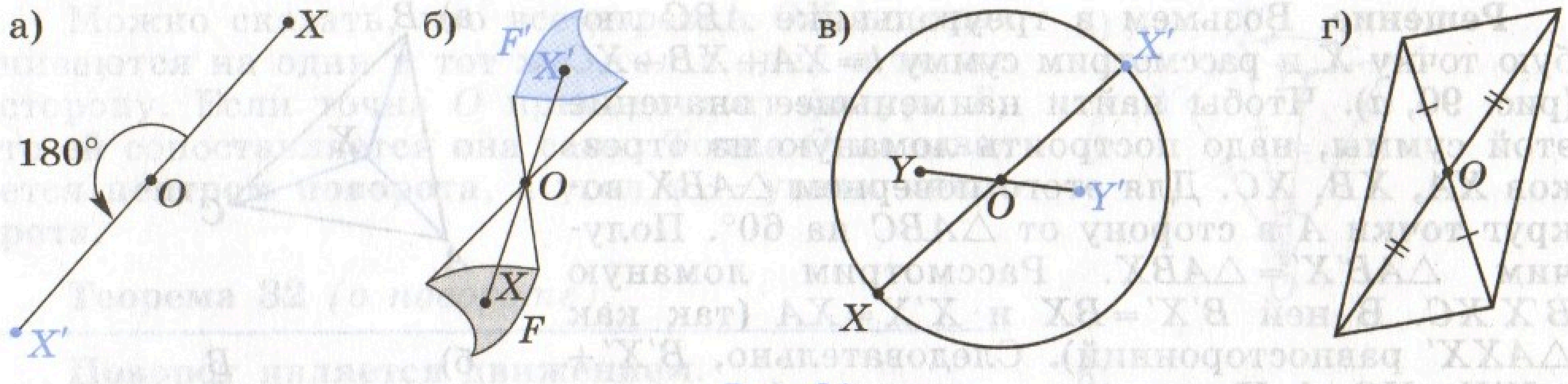


Рис. 91

фигура F может быть симметрична сама себе относительно точки O. Тогда говорят, что **фигура F симметрична относительно точки O** и что точка O является **центром симметрии фигуры F**. Например, центр круга — это его центр симметрии (рис. 91, *в*), точка пересечения диагоналей параллелограмма — его центр симметрии (рис. 91, *г*).

Замечание. Конечно, центральную симметрию можно определить и не используя понятие поворота. Объясните, как это сделать.

Основное свойство центральной симметрии содержится в следующем утверждении: *центральная симметрия является движением, изменяющим направления на противоположные.* На языке векторов это значит, что когда точкам X и Y при центральной симметрии соответствуют точки X' и Y', то

$$\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть при центральной симметрии с центром в точке O точки X и Y перешли в точки X' и Y' (рис. 92). Поскольку точка O — середина отрезка XX', то

$$\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}. \qquad (4)$$

Аналогично

$$\overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}. \qquad (5)$$

Находим вектор $\overrightarrow{X'Y'}$, учитывая равенства (4) и (5):

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX} = -(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = -\overrightarrow{XY}.$$

Равенство (3) доказано. ■

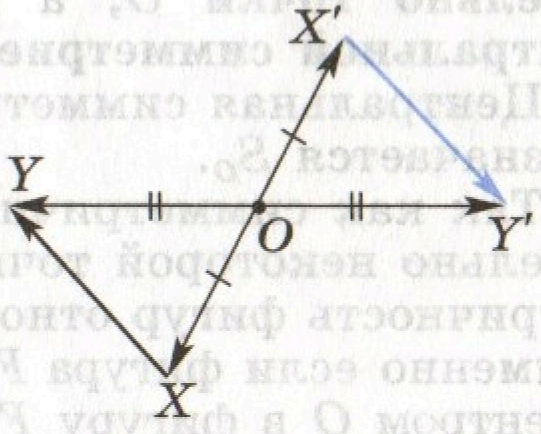


Рис. 92

Доказанное свойство является характерным свойством центральной симметрии. А именно справедливо обратное утверждение — признак центральной симметрии: *движение, изменяющее направления на противоположные, является центральной симметрией.*

Доказательство. Пусть f — движение, изменяющее направления на противоположные. Пусть f переводит точку X в точку X' и точка O — середина отрезка XX'. Покажем, что f — симметрия с центром в точке O. Возьмем любую точку Y, и пусть $Y' = f(Y)$. По условию имеет место равенство (3). Кроме того, так как O — середина отрезка XX', то имеет место и равенство (4). Учитывая (3) и (4), получаем, что

$$\overrightarrow{OY'} = \overrightarrow{OX'} + \overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{XY} = -(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY}) = -\overrightarrow{OY}.$$

Равенство $\overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}$ означает, что точка O — середина отрезка YY'. Так как Y — любая точка, то f — симметрия с центром в точке O. ■

Замечание. Сравните этот признак центральной симметрии с признаком параллельного переноса (п. 27.1).

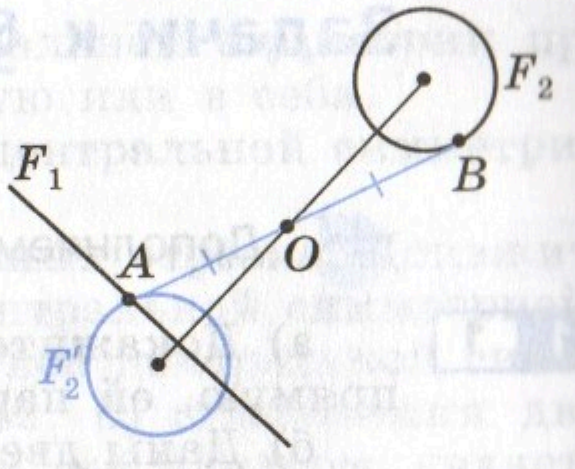


Рис. 93

Методом центральной симметрии легко решается такая задача: *построить отрезок, концы которого лежат на данных фигурах F_1 и F_2, а середина находится в данной точке O* (рис. 93). Чтобы построить такой отрезок, можно построить фигуру F_2', симметричную фигуре F_2 относительно точки O. Пусть A — точка пересечения фигур F_1 и F_2'. Тогда симметричная ей (относительно O) точка B принадлежит фигуре F_2.

Поскольку точка O — середина отрезка AB, то отрезок AB является решением задачи. ■

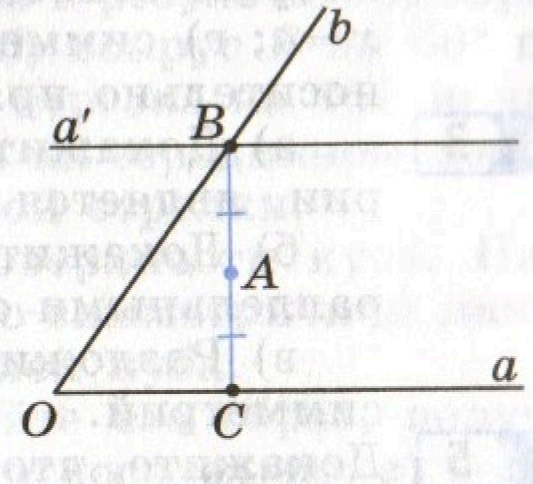


Рис. 94

Частным случаем решенной задачи является такая задача: *через точку A внутри угла провести отрезок, концы которого лежат на сторонах этого угла, а серединой является данная точка A* (рис. 94). Докажите, что среди всех прямых, проходящих через точку A, прямая, которая содержит отрезок BC, отсекает треугольник наименьшей площади.

Вопросы

1. Какие вы знаете движения плоскости?
2. Что такое параллельный перенос и каковы его свойства?
3. Что такое отражение в прямой и каковы его свойства?
4. Что такое поворот и каковы его свойства?
5. Что такое центральная симметрия и каковы ее свойства?
6. Что значат такие фразы: «Фигура имеет ось симметрии», «Фигура имеет центр симметрии»?

Задачи к § 27

Дополняем теорию

27.1 1 а) Докажите, что в результате переноса прямая переходит в прямую, ей параллельную, или в себя.

б) Даны две параллельные прямые. Каким переносом одна из них может быть получена из другой?

в) Даны два равных и параллельных отрезка. Каким переносом один из них может быть получен из другого?

г) Докажите, что в результате переноса вектор переходит в равный вектор.

27.2 2 Докажите, что перенос на вектор $\vec{a} = (x_0, y_0)$ записывается по формулам $x_1 = x + x_0$, $y_1 = y + y_0$, где (x, y) — исходная точка, а (x_1, y_1) — ее образ.

27.3 1 Докажите, что: а) преобразование, обратное переносу, является переносом; б) последовательное выполнение двух переносов является переносом.

27.4 3 Докажите, что: а) если прямая параллельна оси симметрии, то симметричная ей прямая также параллельна этой оси; б) если прямая пересекает ось симметрии, то симметричная ей прямая пересекает эту ось, причем в той же точке, что и исходная прямая; в) если прямая перпендикулярна оси симметрии, то она в результате этой симметрии совмещается сама с собой.

27.5 3 Запишите в координатах: а) симметрию относительно оси x; б) симметрию относительно оси y; в) симметрию относительно прямой $x = a$; г) симметрию относительно прямой $y = b$; д) симметрию относительно прямой $y = x$.

27.6 3 а) Докажите, что преобразование, обратное осевой симметрии, является осевой симметрией.

б) Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом.

в) Разложите данный перенос на композицию двух осевых симметрий.

27.7 5 Докажите, что один из углов между прямой и ее образом, полученным в результате поворота, равен углу поворота.

27.8 5 а) Докажите, что преобразование, обратное повороту, является поворотом.

б) Докажите, что композиция двух поворотов с общим центром является поворотом. Чему равен угол этого поворота?

27.9 5 а) Две прямые пересекаются. Докажите, что композиция двух отражений в этих прямых является поворотом.

б) Заданный поворот разложите на композицию двух отражений.

27.10 5 Запишите в координатах поворот вокруг начала координат на угол: а) 90°; б) φ.

27.11 7 а) Докажите, что в результате центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую или в себя.

б) Две прямые параллельны. Какой центральной симметрией одна из них получается из другой?

в) Нарисуйте два равных и параллельных отрезка. Докажите, что один можно получить из другого центральной симметрией.

27.12 7 Докажите, что: а) преобразование, обратное центральной симметрии, является центральной симметрией; б) композиция двух центральных симметрий с одним и тем же центром является тождественным преобразованием.

27.13 7 Запишите в координатах центральную симметрию относительно: а) точки O; б) точки $A(x_0, 0)$; в) точки $B(0, y_0)$; г) точки $C(x_0, y_0)$.

Рисуем

27.14 1 Нарисуйте образ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$.

27.15 1 Нарисуйте образ правильного тетраэдра $ABCD$ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AK}$, где точка K — середина BC; г) $\overrightarrow{DQ}$, где точка Q — центр треугольника ABC.

27.16 3 Нарисуйте симметричные относительно двух прямых: а) два отрезка; б) два многоугольника.

27.17 3 Нарисуйте отрезок. Нарисуйте отрезок, симметричный ему относительно прямой: а) содержащей его; б) проходящей через его конец; в) проходящей через точку внутри его; г) параллельной ему; д) проходящей мимо него и не параллельной ему.

27.18 5 Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте его образ в результате поворота: а) вокруг A на 120° по часовой стрелке; б) вокруг B на 60° против часовой стрелки; в) вокруг середины отрезка на 45° по часовой стрелке; г) вокруг точки O, лежащей на серединном перпендикуляре к отрезку, на 90° против часовой стрелки.

27.19 7 Нарисуйте ломаную, которая идет по поверхности куба. Нарисуйте три проекции ломаной, центрально-симметричной данной относительно точки пересечения диагоналей куба.

27.20 7 Нарисуйте правильный тетраэдр. Нарисуйте его образ, полученный в результате центральной симметрии относительно: а) вершины; б) середины ребра; в) центра основания; г) середины отрезка, соединяющего вершину с центром противоположной грани.

Составьте аналогичные задачи про куб.

Планируем

27.21 2 Нарисуйте систему координат, точки $A(2, 2)$ и $B(4, -4)$ и полосу между осью x и прямой $y = 1$. а) Как найти точки K и L на краях полосы, такие, чтобы ломаная $AKLB$ была кратчайшей? б) Как найти координаты точек K и L? в) Решите задачи «а» и «б» для полосы между осью x и прямой $y = -1$.

27.22 **4** а) В системе координат даны две точки $A(2, 1)$ и $B(3, 3)$. Как найти точку K на оси x, такую, что ломаная AKB кратчайшая? Как вычислить координаты точки K и длину этой ломаной?

б) Решите задачу «а» для точки L на оси y.

27.23 **4** а) Прямая a параллельна прямой AB. Как найти на прямой a точку X, такую, что ломаная AXB является кратчайшей?

б) Как вы решите задачу «а», если прямые a и AB не будут параллельными, причем отрезок AB будет лежать по одну сторону от a?

27.24 **6** Внутри острого угла O величиной φ взяты точки A и B. Пусть A_1 и A_2 — проекции точки A на стороны угла, а B_1 и B_2 — проекции точки B на стороны угла. (Точки A_1 и B_1 на одной стороне, а точки A_2 и B_2 на другой.) Как найти угол между A_1A_2 и B_1B_2?

Находим величину

27.25 **1** Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте его образ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AC}$ при условии, что точка C не лежит на прямой AB. Какую фигуру «заметает» при этом переносе отрезок AB? Чему равна площадь этой фигуры, если $AB = AC = 1$, $\angle CAB = \varphi$?

27.26 **1** Равносторонний треугольник ABC со стороной 2 подвергается переносу. Рассмотрим две фигуры: объединение F_1 и пересечение F_2 исходного и полученного треугольников. Вычислите периметр и площадь F_1 и F_2, если перенос задан: а) вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; б) вектором $\overrightarrow{BO}$, где O — центр треугольника.

27.27 **1** В результате переноса система координат с началом в точке O перешла в систему координат с началом в точке O_1, которая в старой системе координат имела координаты (2, 1). а) Какие координаты в новой системе координат будут у точки, которая раньше имела координаты (−5, 4)? б) Какие координаты имела точка, которая теперь имеет координаты (−4, −3)? в) Решите эту задачу в общем виде.

27.28 **3** Нарисуйте равносторонний треугольник. Отразите его от: а) средней линии; б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей через середину другой стороны.

Нарисуйте объединение исходного и полученного треугольников. Вычислите его периметр и площадь, если сторона треугольника равна 2.

27.29 **3** В круге с центром O радиусом 6 проведена хорда AB на расстоянии 3 от центра. Отразите круг от прямой AB. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов. Вычислите их периметр и площадь.

27.30 **3** Отразите прямоугольник от прямой, проходящей через его диагональ. Нарисуйте объединение исходного и полученного прямоугольников. Чему равны его периметр и площадь, если стороны прямоугольника равны a и b?

27.31 **5** Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте его образ в результате поворота по часовой стрелке: а) вокруг точки A на 135°; б) вокруг точки B на 90°; в) вокруг точки C на 45°; г) вокруг точки D на 30°; д) вокруг центра квадрата на 45°.

Пусть площадь данного квадрата равна S. В каждом из случаев «в», «г», «д» найдите площадь объединения исходного и полученного квадратов.

27.32 **5** Нарисуйте равносторонний треугольник ABC. Нарисуйте его образ в результате поворота против часовой стрелки: а) вокруг точки C на 30°; б) вокруг середины AC на 90°; в) вокруг центра треугольника на 30°; г) вокруг центра треугольника на 90°.

Пусть площадь данного треугольника равна S. В каждом случае найдите площадь объединения исходного и полученного треугольников.

27.33 **5** Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1 повернули на угол 45° относительно вершины прямого угла. Чему равна площадь общей части исходного и полученного треугольников?

Решите задачу в общем случае, рассматривая поворот на угол φ.

27.34 **5** Ромб с острым углом φ и стороной 1 повернули вокруг центра на 90°. Чему равна площадь пересечения исходного и полученного ромбов?

27.35 **7** Нарисуйте треугольник, центрально-симметричный данному равностороннему треугольнику относительно: а) середины высоты; б) центра.

Пусть сторона данного треугольника равна 1. Вычислите периметр и площадь пересечения и объединения исходного и полученного треугольников.

27.36 **7** В круге с центром O радиусом 4 взята точка A, удаленная от центра на 2. Нарисуйте образ этого круга в результате центральной симметрии относительно A. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов. Вычислите их периметры и площади.

Выводим уравнение

27.37 **1** В результате переноса система координат с началом в точке O перешла в систему координат с началом в точке O_1, которая в старой системе координат имела координаты (2, 1). а) Какие уравнения будут у тех фигур, которые раньше задавались такими уравнениями: 1) $x = 2$; 2) $y = -2$; 3) $y = x$; 4) $y = -2x + 3$; 5) $x^2 + y^2 = 1$? б) Какие уравнения были у тех фигур, которые теперь задаются уравнениями, указанными в «а»? в) Изменяются ли координаты вектора в результате переноса системы координат?

Решите задачи «а» — «в» в общем виде.

27.38 **5** Рассмотрим поворот вокруг начала координат на 90°. Найдите образ: а) точки $A(1, 1)$; б) прямой $x = -2$; в) прямой $y = 2x$; г) прямой $y = -x + 1$; д) окружности $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

27.39 5 Пусть систему координат повернули на угол φ вокруг точки O. Какими будут теперь: а) координаты точки $A(1, 1)$; б) уравнение прямой $y=3$; в) уравнение прямой $y=-x$; г) уравнение прямой $2x-3y=1$; д) уравнение окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=4$?

Доказываем

27.40 2 Используя перенос, докажите свойства средней линии: а) треугольника; б) трапеции.

27.41 2 Две равные окружности имеют точку касания K. Докажите, что: а) любая прямая, пересекающая их в точке K, пересекает их по равным хордам; б) если $\angle AKB=90°$ (где точки A и B лежат на разных окружностях), то отрезок AB равен диаметру окружностей.

27.42 2 Нарисуйте любой треугольник. Нарисуйте его образ при переносе на какой-либо вектор. В результате переноса каждая его сторона «заметает» некоторую площадь. Докажите, что бóльшая из этих площадей равна сумме меньших. Используйте этот результат для доказательства теоремы Пифагора.

27.43 2 Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить треугольник, площадь которого не меньше чем $\frac{1}{4}$. Сможете ли вы улучшить эту оценку?

27.44 4 График некоторой функции имеет две оси симметрии, перпендикулярные оси x. Докажите, что она является периодической. Верно ли обратное?

27.45 6 Докажите, что в одной окружности равные хорды: а) равноудалены от центра; б) видны из центра под равными углами; в) соединяют концы равных дуг; г) отсекают от круга равные сегменты.

Проверьте обратные утверждения.

27.46 6 Центр окружности совпадает с центром правильного треугольника, а сама она пересекает его стороны. Докажите, что полученные при этом хорды будут равны. Проверьте обратное. Обобщите данное утверждение.

27.47 6 На отрезке AB выбрана точка C. По одну сторону от прямой AB построены равносторонние треугольники ACK и BCL. Докажите, что точка C и середины отрезков KB и LA являются вершинами равностороннего треугольника.

27.48 7 Даны две равные окружности. Через середину отрезка, соединяющего их центры, проведена прямая. Докажите, что если она касается одной окружности, то касается и другой; если она пересекает одну окружность, то пересекает и другую, причем полученные хорды равны. Проверьте обратное.

27.49 7 а) Используя центральную симметрию, докажите теоремы: 1) о средней линии треугольника; 2) о средней линии трапеции; 3) о площади трапеции.

б) Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, имеющих с ней общую вершину.

27.50 7 В треугольнике медиана и биссектриса совпадают. Используя центральную симметрию, докажите, что такой треугольник равнобедренный.

27.51 7 На прямой расположены точки A_1, A_2, A_3, A_4, идущие по порядку возрастания номеров, причем $A_1A_2=A_3A_4$. Докажите, что для любой точки X плоскости выполняется неравенство $XA_1+XA_4 \geqslant XA_2+XA_3$.

Исследуем

27.52 1 а) Существуют ли точки, неподвижные для данного переноса?

б) Существуют ли прямые, неподвижные для данного переноса?

27.53 2 Стороны двух углов соответственно параллельны. Как расположены биссектрисы этих углов?

27.54 2 В выпуклом четырехугольнике средняя линия двух сторон равна полусумме двух других сторон. Какого вида этот четырехугольник? Какого вида будет четырехугольник, если и другая средняя линия обладает тем же свойством?

27.55 2 а) Основания двух равнобедренных треугольников находятся на одной прямой, а сами они лежат по одну сторону от этой прямой. Существует ли прямая, которая пересекает их по равным хордам?

б) Оси симметрии двух равнобедренных треугольников находятся на одной прямой. Существуют ли в них два параллельных и равных отрезка?

27.56 2 Внутри угла движется точка так, что: а) сумма расстояний от нее до сторон угла постоянна; б) разность расстояний от нее до сторон угла постоянна. По какой линии движется точка?

27.57 3 а) Есть ли у осевой симметрии неподвижные точки? неподвижные прямые?

б) Может ли композицией двух осевых симметрий быть осевая симметрия?

27.58 3 Два отрезка симметричны относительно некоторой прямой. Верно ли, что их концы лежат на одной окружности?

27.59 3 Вектор $\vec{b}$ получен из вектора $\vec{a}$ отражением в прямой. Как расположен по отношению к этой прямой вектор: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$?

27.60 3 Два симметричных относительно прямой треугольника, вообще говоря, нельзя совместить непрерывным движением в плоскости. Но в некоторых случаях можно. В каких? В общем же случае можно данные треугольники совместить по частям, полученным в результате их разрезания. Как это сделать?

27.61 3 а) Из точки $A(0, 2)$ на ось x направлен луч света. 1) Пусть он отражается от нее в точке $(2, 0)$. Пройдет ли отраженный луч через точку $(3, 1)$? через точку $(5, 3)$? 2) В какую точку оси x его надо направить, чтобы отраженный луч прошел через точку $(2, 2)$? через точку $(-3, 3)$?

б) Решите задачу «а», если дана точка $A(1, 2)$.

27.62 4 Даны два единичных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярные между собой. Возьмем любой вектор $\vec{x}$. Сможете ли вы выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{x}$ вектор, симметричный вектору $\vec{x}$ относительно прямой, проходящей через вектор $\vec{a}$?

27.63 5 Есть ли у поворота неподвижные точки? неподвижные прямые?

27.64 3 а) На сторонах равностороннего треугольника ABC взяты точки: C_1 на AB, B_1 на AC, A_1 на BC. При этом $AC_1 = BA_1 = CB_1$. Вершинами какого по виду треугольника являются эти точки? Пусть теперь проведены отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и точки K, L, M — точки пересечения этих отрезков. Вершинами какого по виду треугольника являются эти точки?

б) Составьте задачу, аналогичную задаче «а», для квадрата.

в) Обобщите задачи «а» и «б» для правильного многоугольника.

27.65 1 Вокруг равностороннего треугольника описана окружность. По ней движется точка. В любой момент времени известно расстояние от нее до двух вершин треугольника. Сможете ли вы найти расстояние до третьей вершины?

27.66 6 На сторонах остроугольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. а) Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$ и прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть точка O — точка их пересечения. Сможете ли вы найти OA_1, если известны OB и OC? б) Сможете ли вы восстановить исходный треугольник, зная положение точек A_1, B_1, C_1?

27.67 7 Есть ли у центральной симметрии неподвижные точки? неподвижные прямые?

27.68 7 Отрезки AB и CD центрально-симметричны. Верно ли, что отрезки AC и BD центрально-симметричны?

27.69 7 Фигура F_2 центрально-симметрична фигуре F_1. Будет ли центрально-симметричным их пересечение? объединение?

Строим

27.70 2 Постройте трапецию по: а) четырем сторонам; б) основаниям и диагоналям.

27.71 2 Постройте прямую, которая пересекает по равным хордам: а) два равных круга; б) два произвольных круга и при этом проходит через данную точку.

27.72 2 Постройте четырехугольник по: а) четырем сторонам и двум средним линиям; б) четырем углам и двум противоположным сторонам.

27.73 4 Постройте треугольник с наименьшим периметром: а) одна вершина которого находится в данной точке внутри угла, а две другие — на сторонах угла; б) вершины которого лежат на сторонах данного треугольника.

27.74 7 Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

27.75 7 Через точку внутри угла проведите такую хорду угла, которая делится этой точкой пополам.

27.76 7 Через точку внутри угла проведите хорду угла, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

Применяем геометрию

27.77 3 Два зеркала образуют угол. Из точки внутри его надо направить луч так, чтобы, отразившись от двух сторон угла, он вернулся в ту же точку. Как это сделать?

27.78 3 Некий биллиардный стол имеет острый угол BAC. Шар, ударившись о его борт AB, а потом отразившись от него и от борта AC, покатился в некотором направлении. Какой угол он будет составлять с первоначальным направлением движения шара до того, как он ударился о борт AB?

27.79 3 Может ли человек в карманном зеркальце увидеть себя во весь рост?

27.80 3 а) При каком условии вы можете увидеть в озере отражение облака?

б) При каком условии вы в горизонтальном зеркале можете увидеть вертикальный предмет целиком?

Занимательная геометрия

27.81 4 Федя нарисовал равносторонний треугольник. На каждой его стороне он построил квадраты вне этого треугольника, а затем построил их центры. Вася стер этот рисунок, оставив только эти центры. Можно ли восстановить исходный рисунок? А если исходный треугольник будет произвольным?

Участвуем в олимпиаде

27.82 4 Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + 0{,}5BC + CD \geqslant DA$.

27.83 4 Равносторонний треугольник ABC отражают симметрично относительно одной из сторон. Полученный треугольник снова отражают и т. д. Докажите, что если треугольник попал на исходное место, то его вершины заняли исходное положение (точка A попала на прежнее место, точки B и C — тоже).

27.84 4 На окружности выбрано 6 различных точек A, B, C, D, E, F так, что хорда AB параллельна хорде DE, а хорда DC параллельна хорде AF. Докажите, что хорда BC параллельна хорде EF.

27.85 6 На сторонах треугольника ABC как на гипотенузах строятся во внешнюю сторону равнобедренные прямоугольные треугольники ABD, BCE и ACF. Докажите, что отрезки DE и BF равны и взаимно перпендикулярны.