

ГЕОМЕТРИЯ

В. Н. Литвиненко

Тетрадь заданий

10
класс

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для учащихся 10 классов
общеобразовательных учреждений*

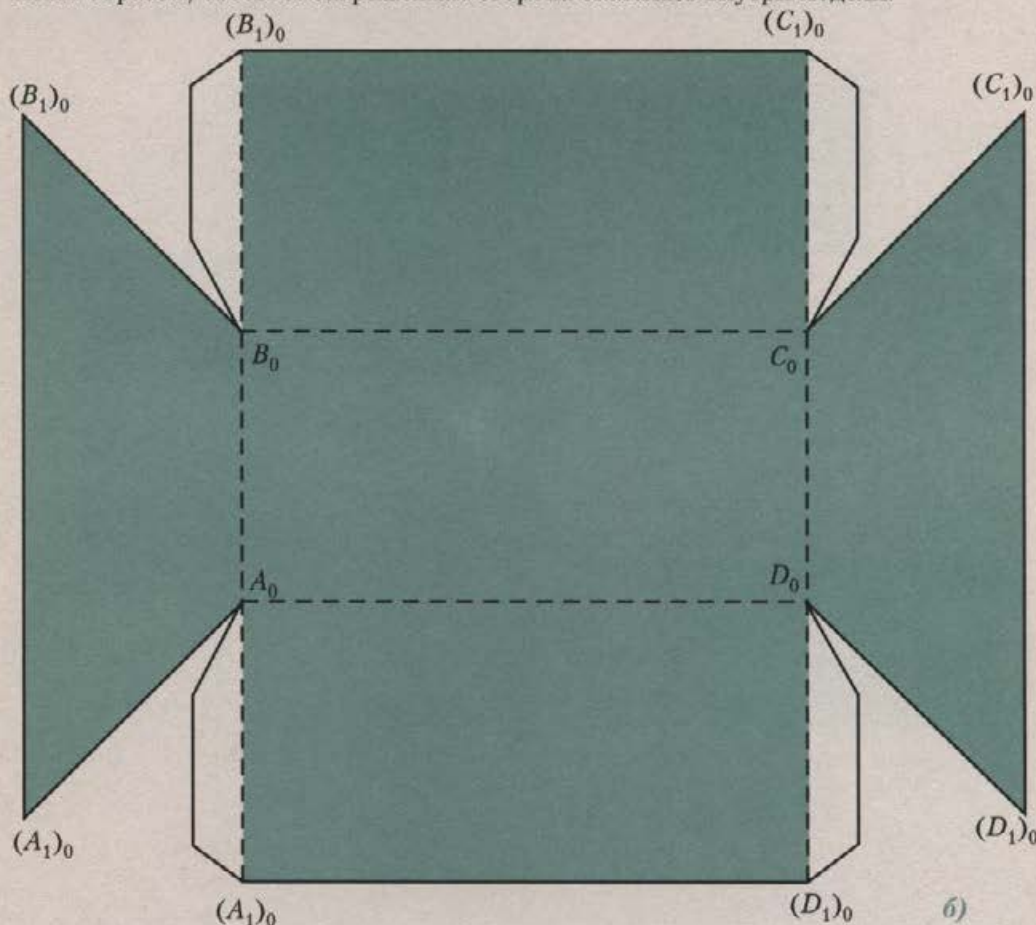
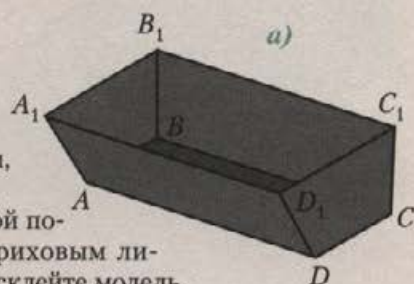
• Вербум — М.
Москва
2002

1. Модель поверхности

Задание 1

На рисунке *а)* изображена поверхность, представляющая собой контейнер, дно которого — прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$, две боковые стенки — прямоугольники с отношением сторон $AA_1 : AD = BB_1 : BC = 1 : 2$, а две другие боковые стенки — равные трапеции, углы при больших основаниях которых равны 45° .

На рисунке *б)* построена развертка модели этой поверхности. Вырежьте ее, сделайте сгибы по штриховым линиям¹. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель таким образом, чтобы ее закрашенная сторона оказалась внутри модели.

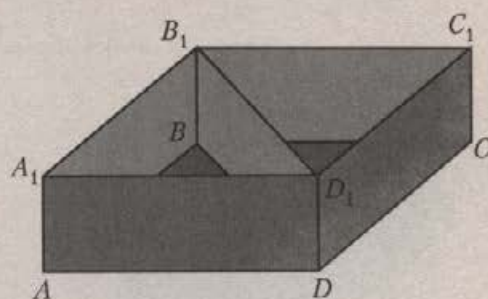


¹ Чтобы сгибание развертки модели выполнялось легче и точнее, можно предварительно провести по каждой линии сгиба без лишнего нажима заостренным (но не режущим) предметом.

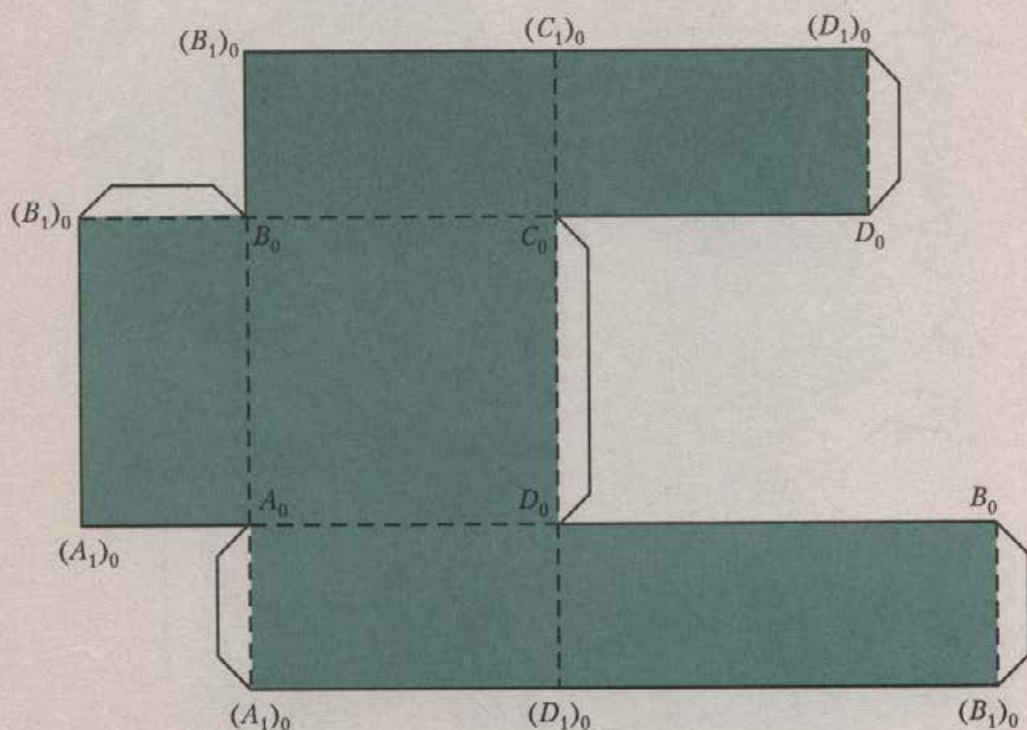
Задание 2

На рисунке *а*) изображена поверхность, представляющая собой контейнер с квадратным основанием и перегородкой по диагонали.

На рисунке *б*) построена развертка модели этой поверхности. Вырежьте ее, сделайте сгибы по штриховым линиям. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель таким образом, чтобы ее закрашенная сторона оказалась внутри модели.



а)



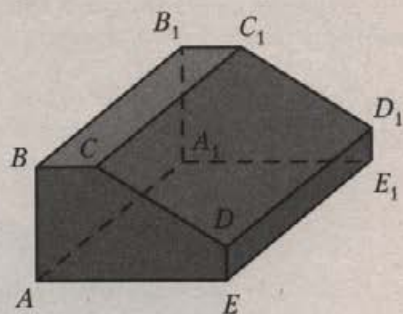
б)

2. Модель многогранника

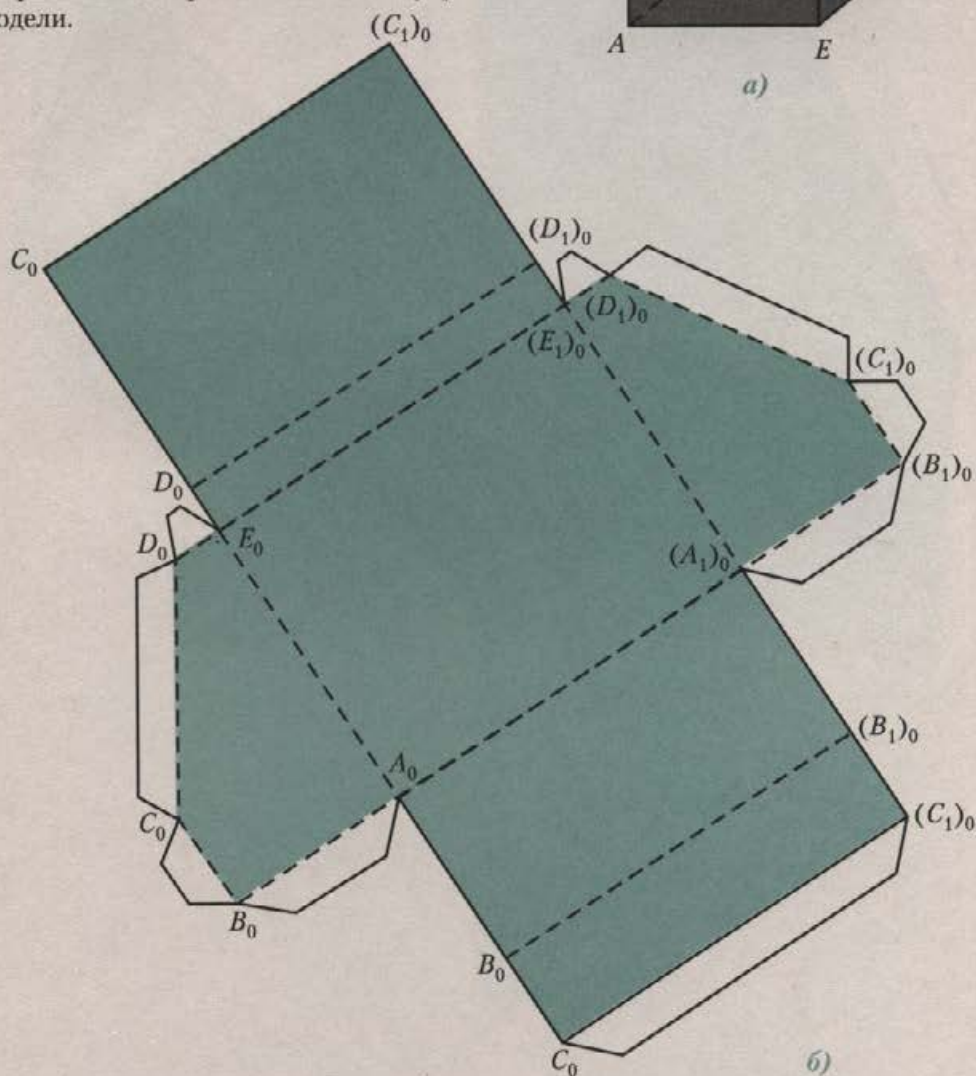
Задание 3

На рисунке *а)* изображен многогранник, а на рисунке *б)* построена развертка его модели.

Вырежьте ее, сделайте сгибы по штриховым линиям. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель многогранника таким образом, чтобы ее закрашенная сторона оказалась внутри модели.



а)



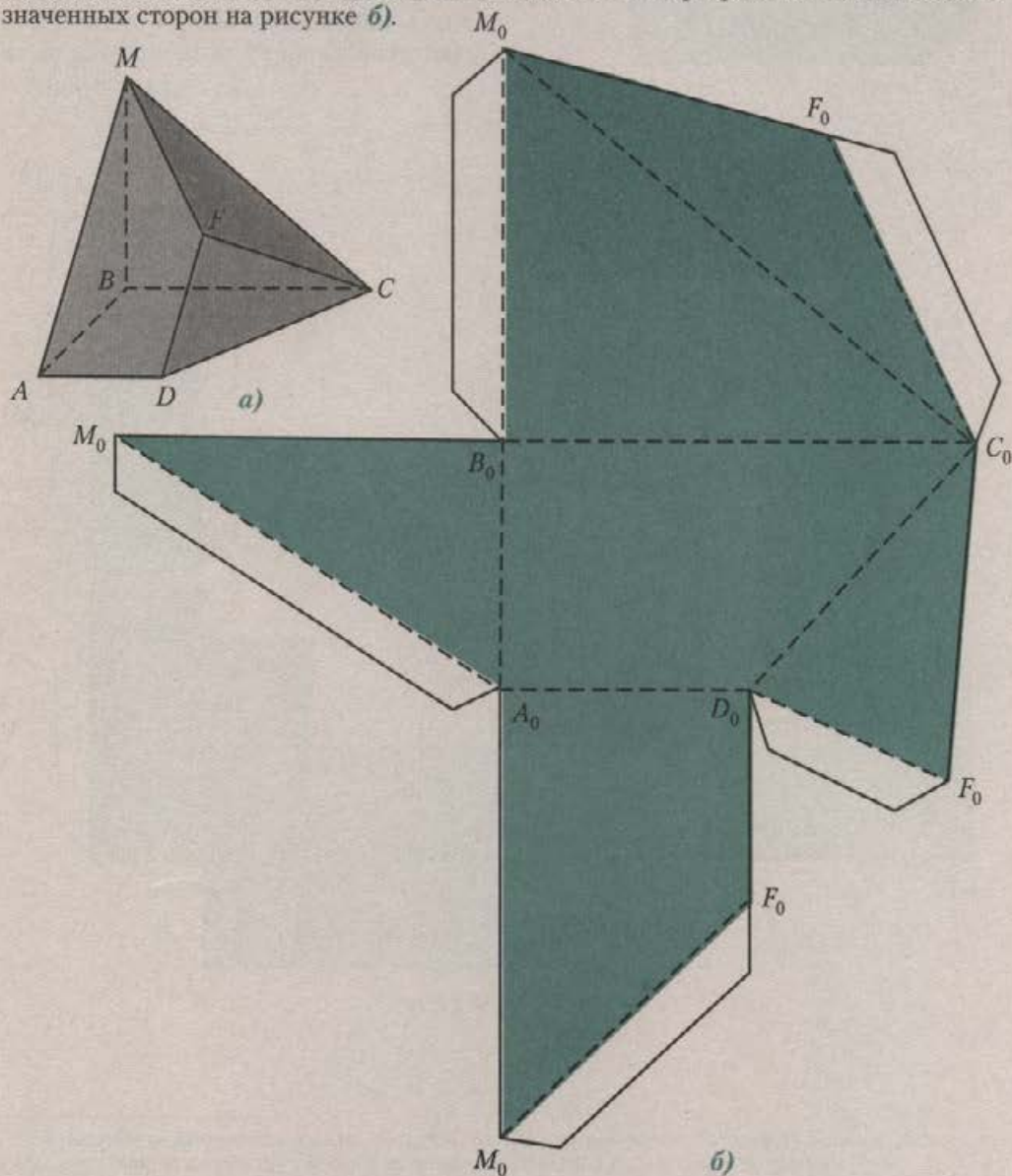
б)

Задание 4

На рисунке *а)* изображен многогранник, а на рисунке *б)* построена развертка его модели.

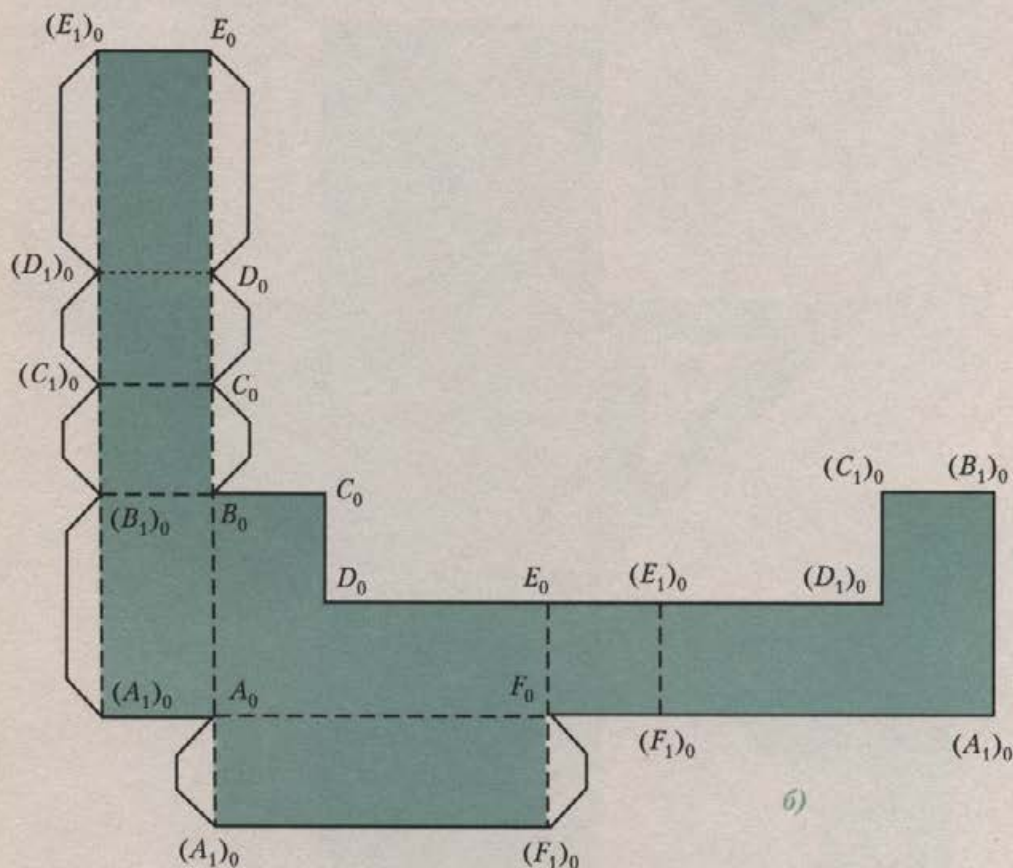
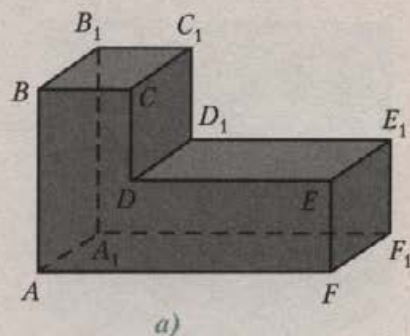
Вырежьте ее, сделайте сгибы по штриховым линиям. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель многогранника таким образом, чтобы ее закрашенная сторона оказалась внутри модели.

Измерьте сторону M_0B_0 треугольника $M_0A_0B_0$ и сторону M_0B_0 треугольника $M_0B_0C_0$, убедитесь, что эти стороны равны. Укажите еще пары равных и одинаково обозначенных сторон на рисунке *б)*.



На рисунке *а)* изображен многогранник, а на рисунке *б)* построена развертка его модели. Двух выступов для склеивания на развертке не хватает.

Достройте недостающие выступы, затем вырежьте развертку, согните ее по линиям сгиба¹, смажьте клеем все выступы и склейте модель таким образом, чтобы ее закрашенная сторона оказалась внутри модели.

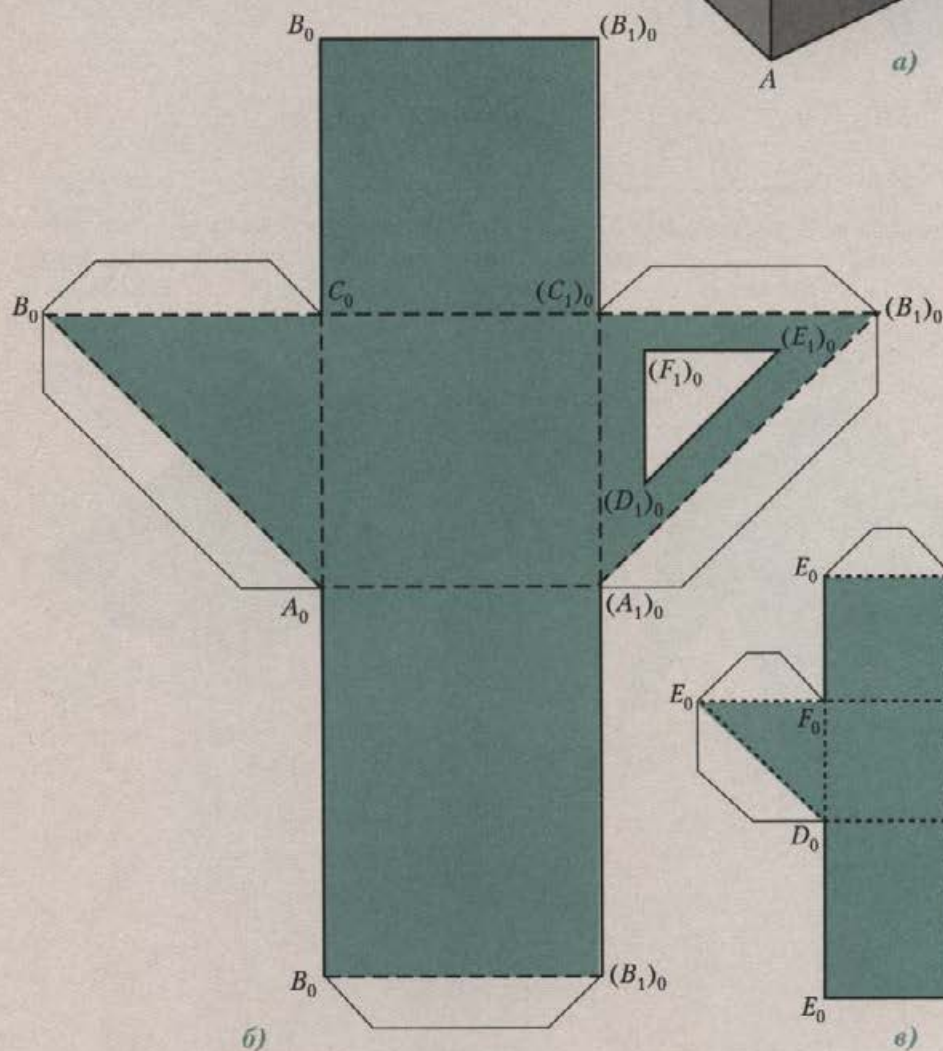
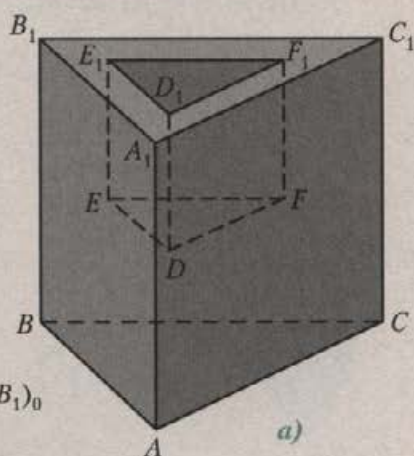


¹ Сгибание развертки модели по точечной линии (линия обратного сгиба) выполняется в сторону, противоположную той, по которой делалось сгибание по штриховым линиям.

На рисунке *а)* изображен многогранник, а на рисунках *б)* и *в)* построены две детали развертки его модели.

Вырежьте эти детали и согните их по линиям сгиба. Подумайте, в каком порядке легче склеить модель многогранника.

Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель таким образом, чтобы покрашенные стороны ее деталей оказались внутри модели.

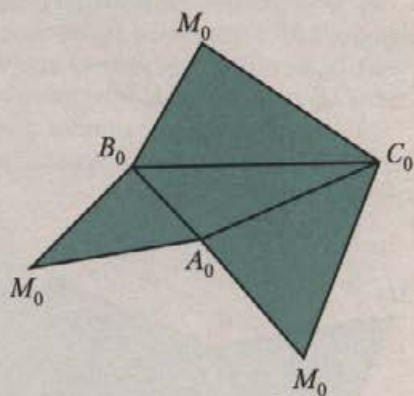


3. Развертка пирамиды. Модель пирамиды

Задание 7

На рисунке построена развертка пирамиды $MABC$ на плоскость ABC . Постройте развертки этой пирамиды, разворачивая ее грани на следующие плоскости:

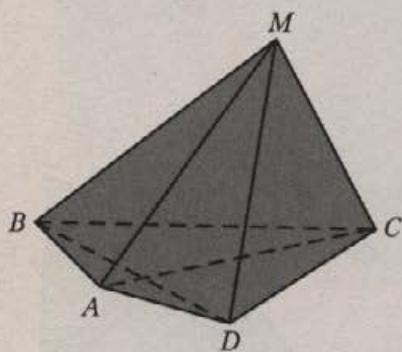
- а) MAC ; б) MBC .



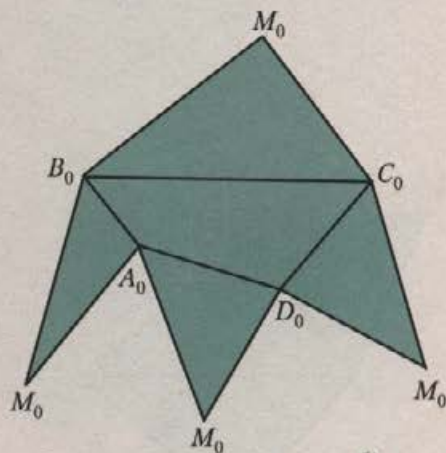
Задание 8

На рисунке а) изображена пирамида $MABCD$, а на рисунке б) построена ее развертка. Постройте развертки следующих пирамид:

- а) $MABC$; б) $MACD$; в) $MBCD$; г) $MABD$.



а)



б)

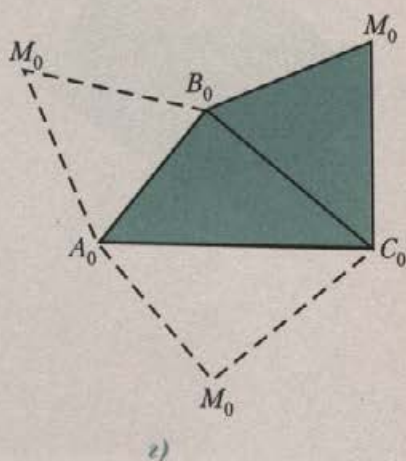
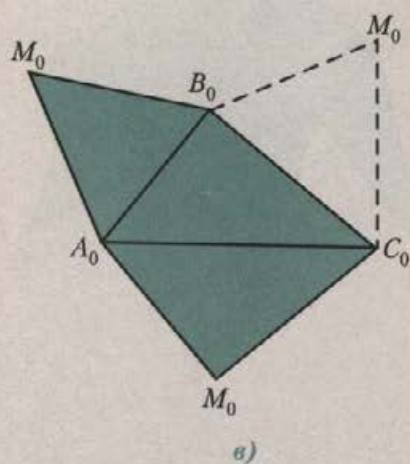
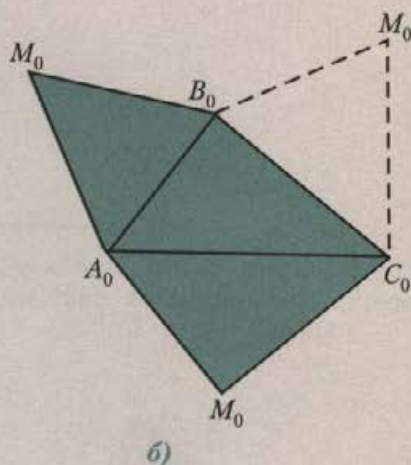
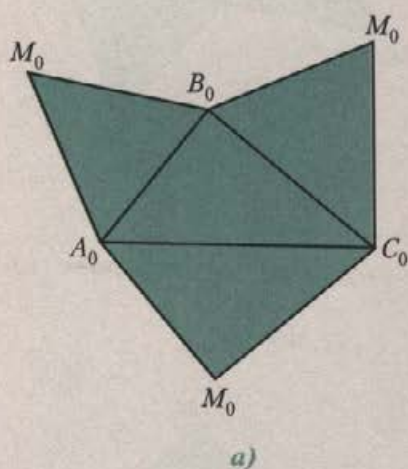
Задание 9

На рисунке *а)* построена развертка пирамиды $MAVC$. Постройте развертки этой же пирамиды:

а) повернув на рисунке *б)* треугольник $M_0B_0C_0$ вокруг точки C_0 до совпадения его вершины M_0 с вершиной M_0 треугольника $M_0A_0C_0$;

б) повернув на рисунке *а)* треугольник $M_0B_0C_0$ вокруг точки B_0 до совпадения его вершины M_0 с вершиной M_0 треугольника $M_0A_0B_0$;

в) повернув на рисунке *з)* треугольник $M_0A_0C_0$ вокруг точки C_0 и треугольник $M_0A_0B_0$ вокруг точки B_0 до совпадения вершин M_0 этих треугольников с вершиной M_0 треугольника $M_0B_0C_0$.

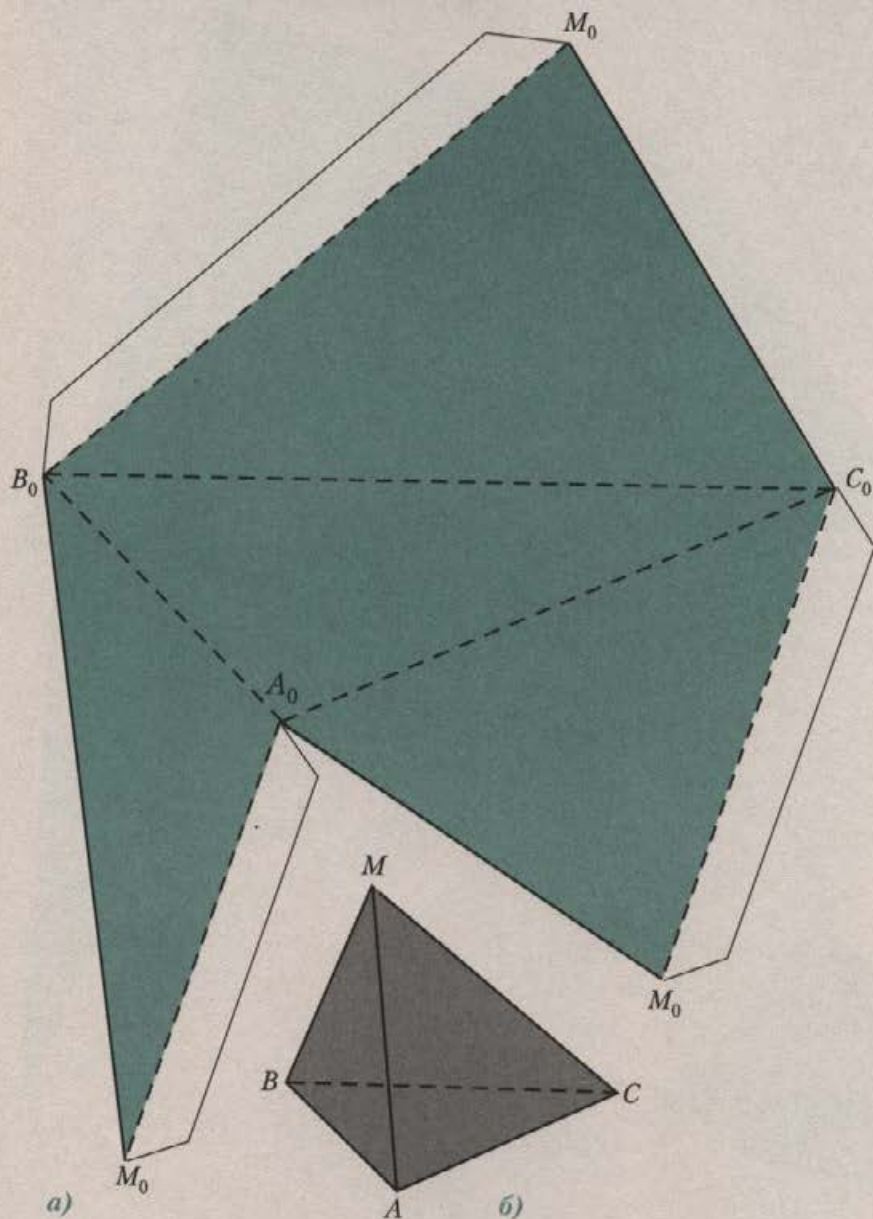


Задание 10

Вырежьте развертку модели пирамиды $MABC$ (рис. а), согните ее по штриховым линиям. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель пирамиды.

Нарисуйте склеенную модель. Сравните свой рисунок с рисунком б).

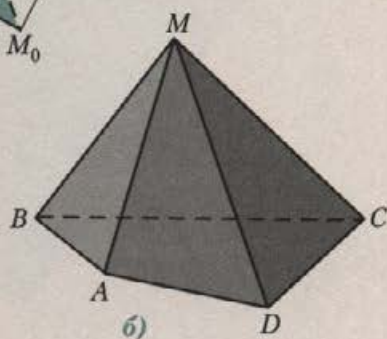
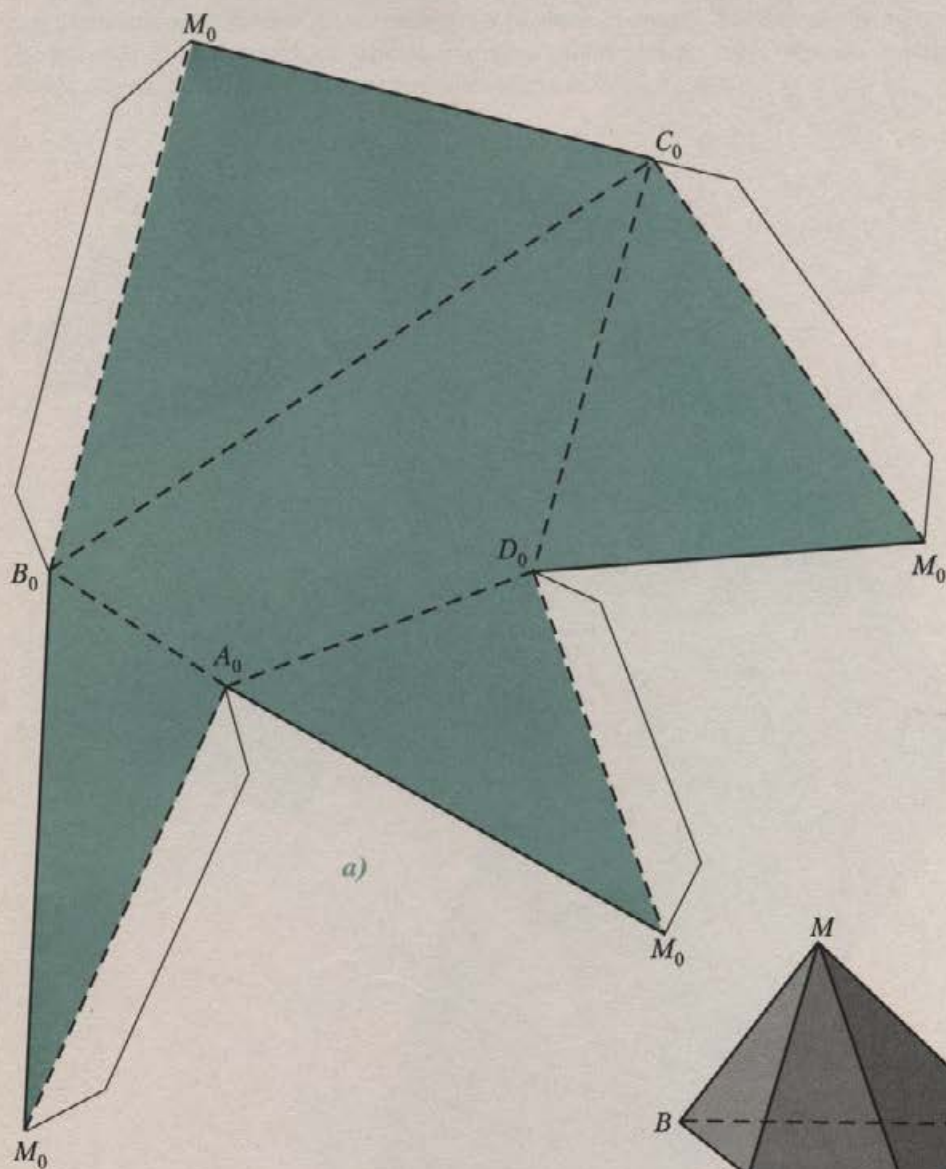
Пирамиды, развертки моделей которых представлены в заданиях 10 и 11, расположены каждая по одну сторону от плоскости любой своей грани. Таким образом, эти пирамиды являются *выпуклыми* многогранниками.



Задание 11

Вырежьте развертку модели пирамиды $MABCD$ (рис. *a*), согните ее по штриховым линиям. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель пирамиды. Назовите: вершину пирамиды; основание пирамиды; боковые грани; боковые ребра; стороны основания.

Нарисуйте склеенную модель. Сравните свой рисунок с рисунком *б*).

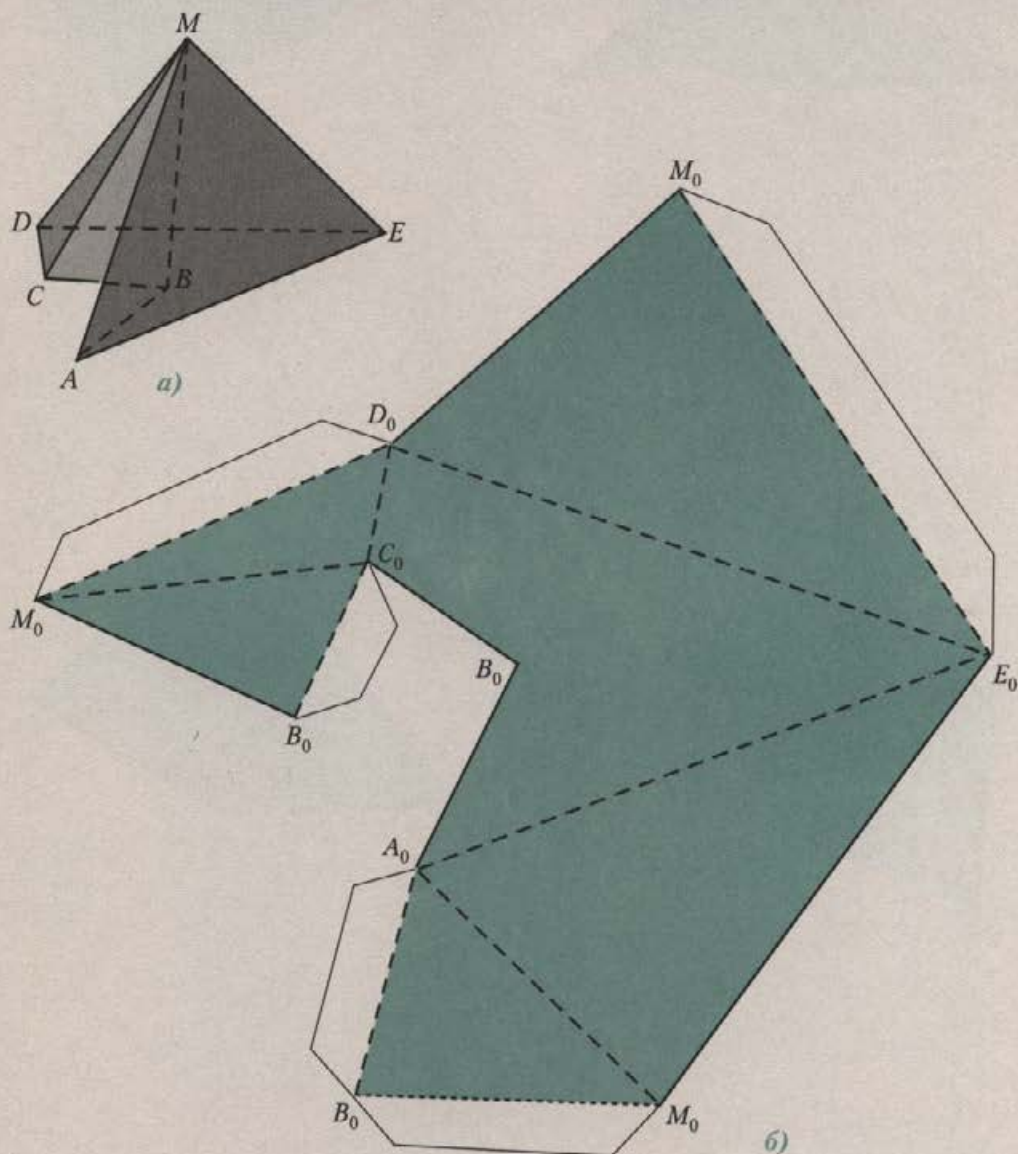


Задание 12

Вырежьте развертку модели пирамиды $MABCDE$ (рис. а). Согните ее по штриховым и точечным линиям. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель пирамиды.

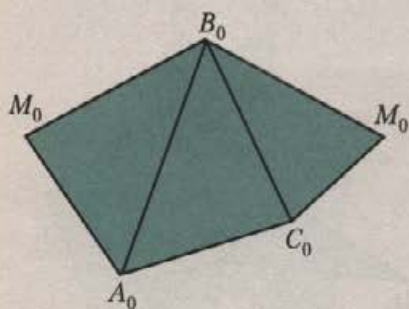
Нарисуйте склеенную модель. Сравните свой рисунок с рисунком б).

Пирамида, модель которой предлагается склеить в этом задании, *невыпуклая*. Так, например, ее точки A и D лежат по разные стороны от плоскости грани MBC . На развертке невыпуклого многогранника обязательно имеются так называемые *линии обратного сгиба*. Их выделяют точечными линиями.

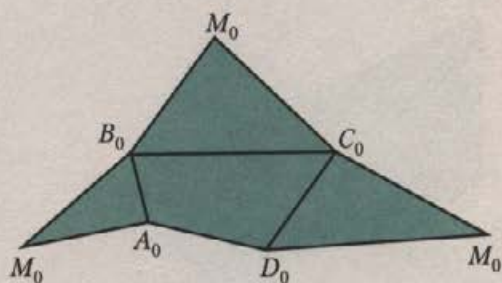


Задание 13

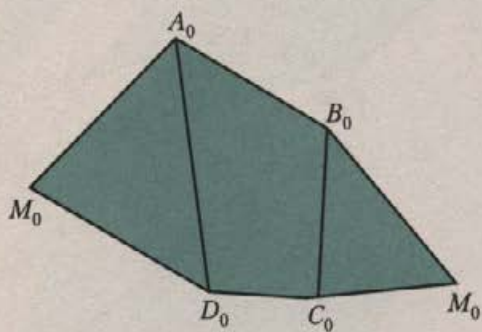
Достройте развертки пирамид изображениями недостающих граней.
Рассмотрите разные варианты достраивания.



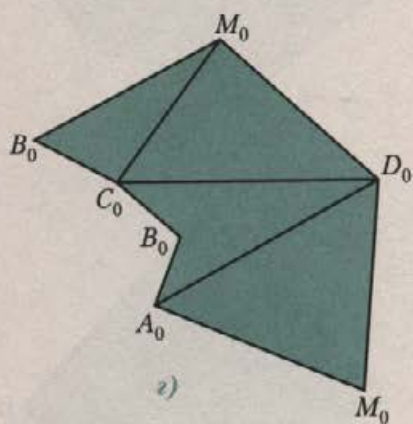
a)



б)



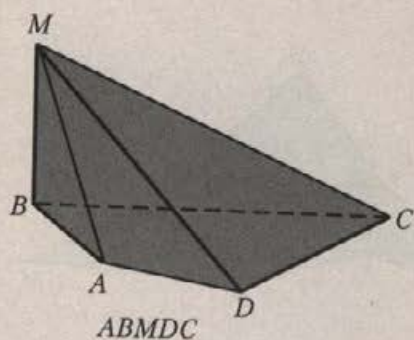
в)



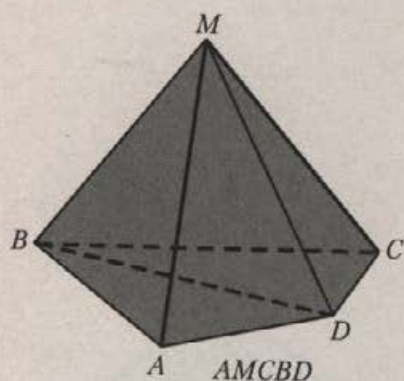
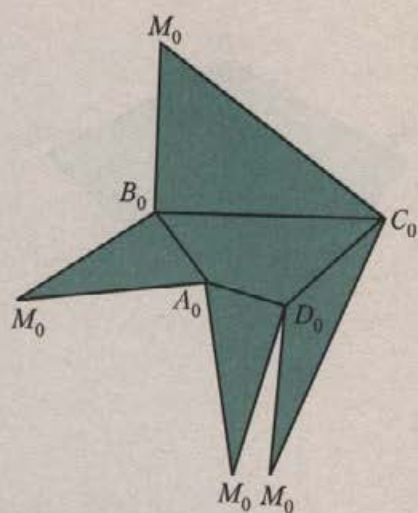
г)

Задание 14

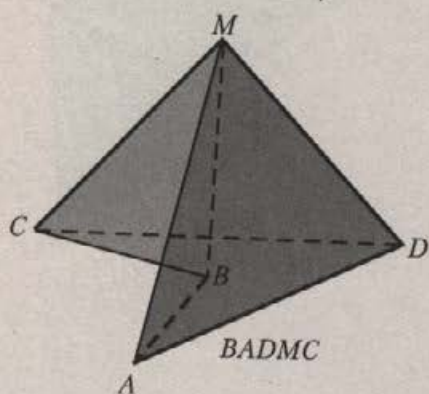
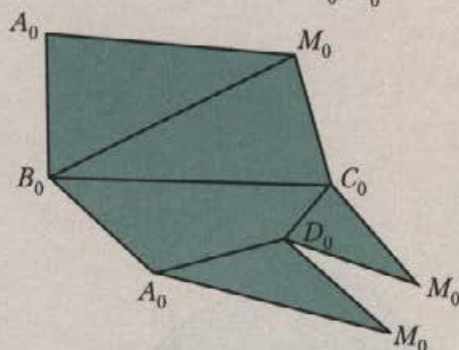
На изображениях пирамид выделены пространственные ломанные. Постройте указанные ломанные на развертках этих пирамид.



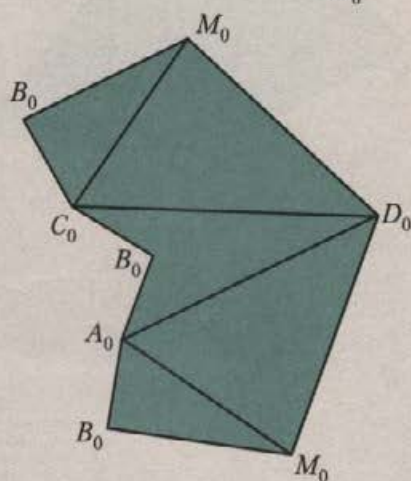
a)



б)

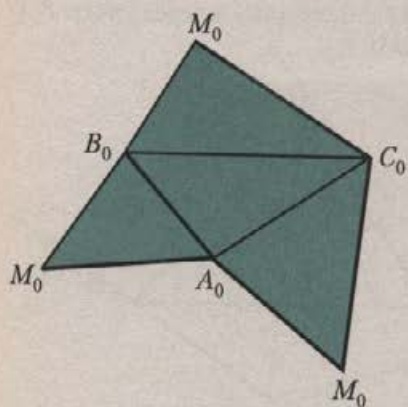


в)

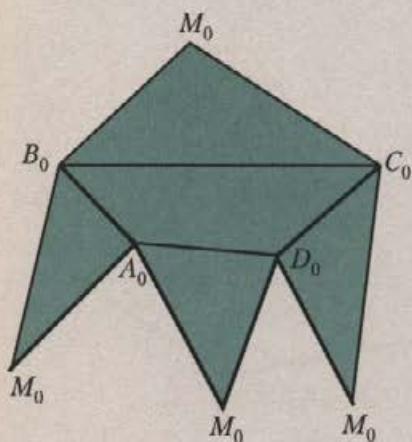
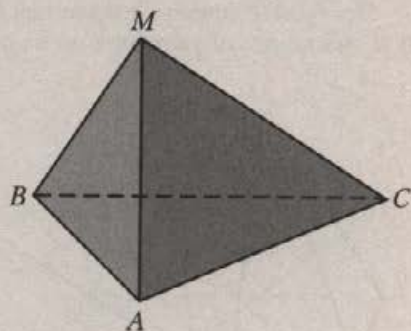


Задание 15

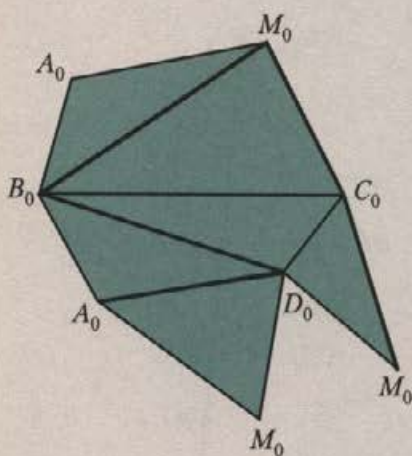
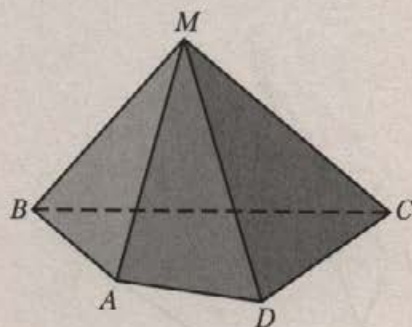
На развертках пирамид выделены звенья пространственных ломаных. Постройте эти ломаные на изображениях пирамид.



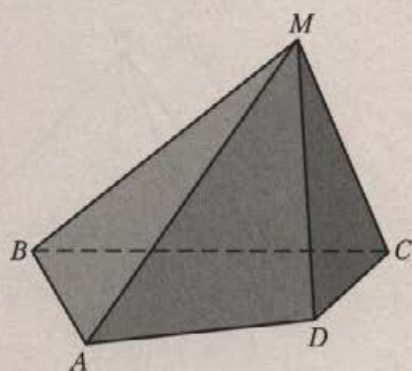
a)



б)



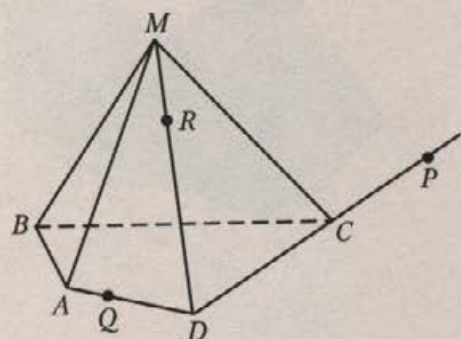
в)



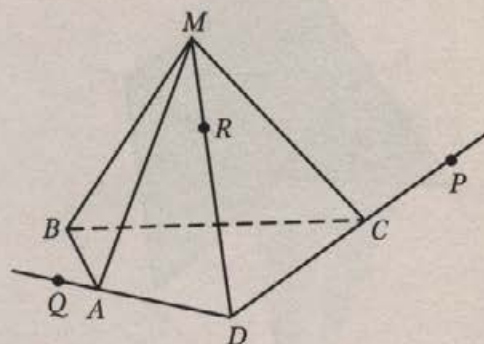
4. Построение сечения пирамиды

Задание 16

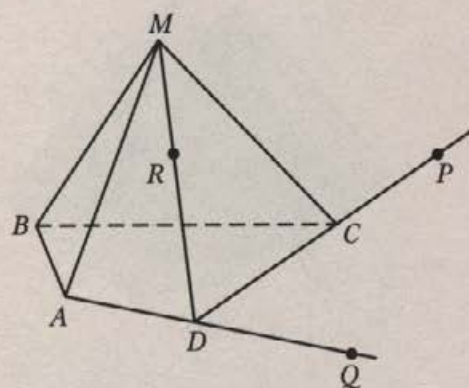
Постройте сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью, проходящей через точки P , Q и R , лежащие соответственно на прямых DC , DA и DM .



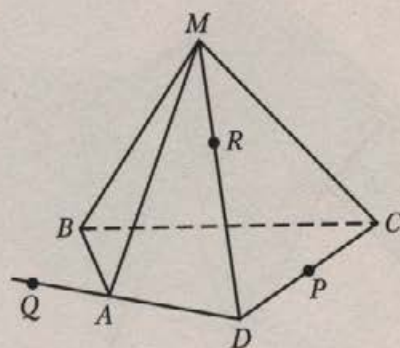
a)



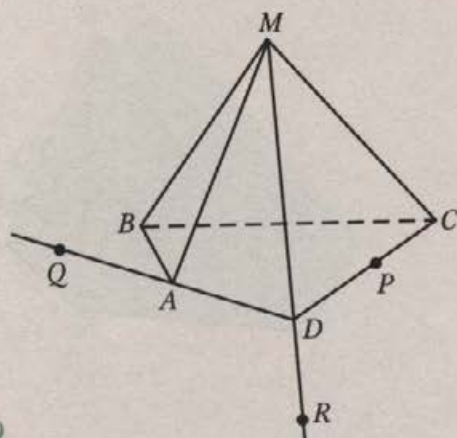
б)



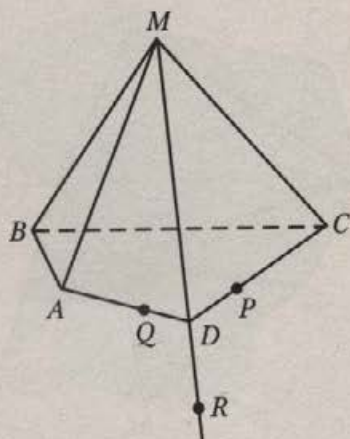
в)



г)



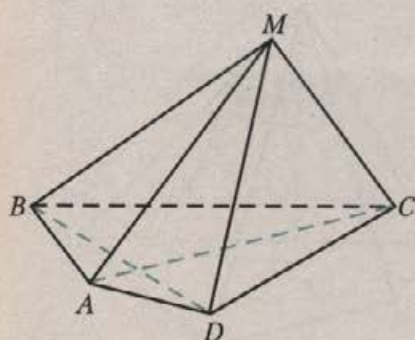
д)



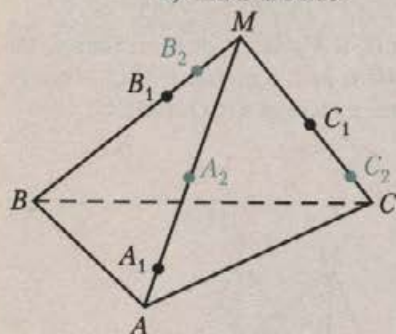
е)

Задание 17

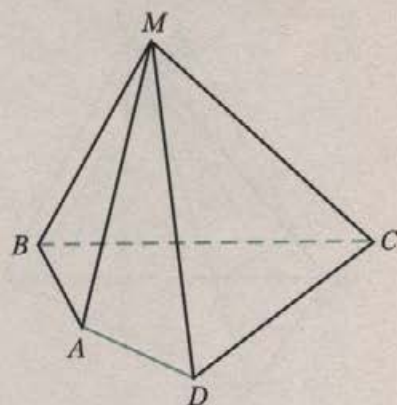
Постройте линию пересечения заданных секущих плоскостей пирамиды.



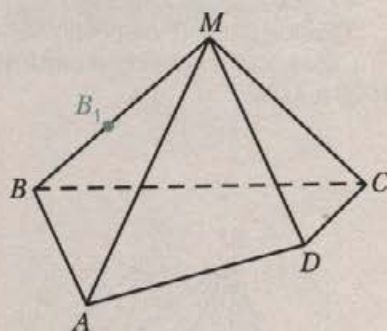
а) MDB и MAC



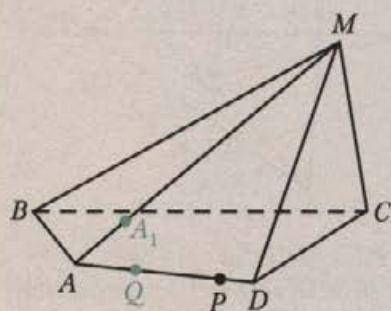
б) $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$



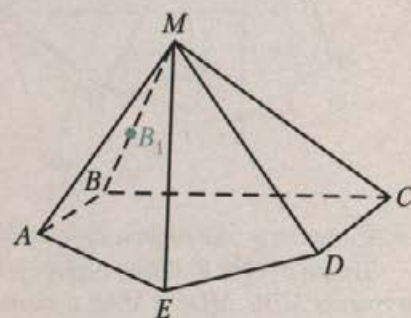
б) MBC и MAD



в) AB_1C и MDB



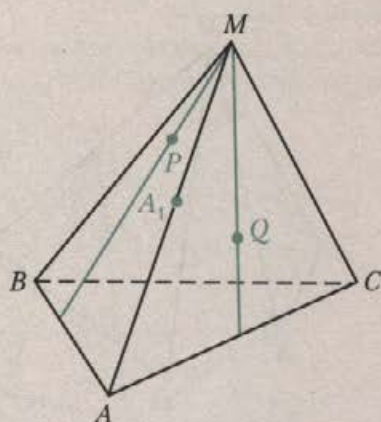
г) A_1BQ и MCP



д) AB_1C и MCE

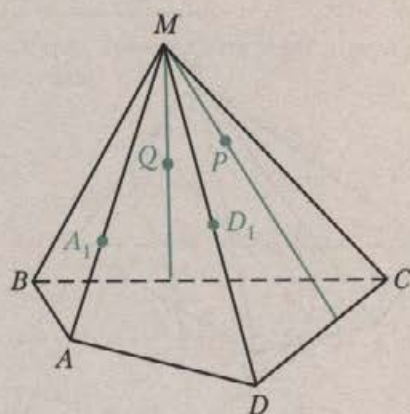
Задание 18

Постройте точки пересечения заданных прямых с плоскостью ABC .



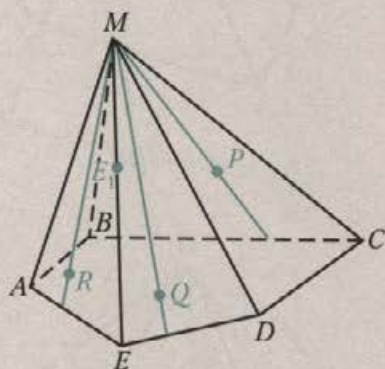
1. а) A_1Q ; б) PA_1 ; в) PQ .

Точка A_1 лежит на ребре MA , а точки P и Q лежат соответственно в гранях MAB и MAC .



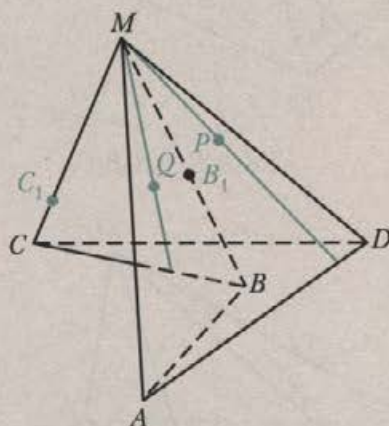
2. а) PD_1 ; б) PA_1 ; в) PQ .

Точки D_1 и A_1 лежат соответственно на ребрах MD и MA , а точки P и Q — соответственно в гранях MCD и MBC .



3. а) PQ ; б) PR ; в) PE_1 .

Точки P , Q и R лежат соответственно в гранях MBC , MDE и MAE , а точка E_1 лежит на ребре ME .

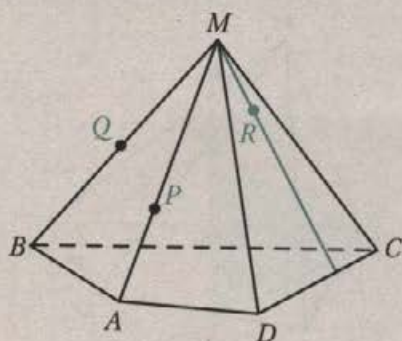


4. а) PB_1 ; б) PC_1 ; в) PQ .

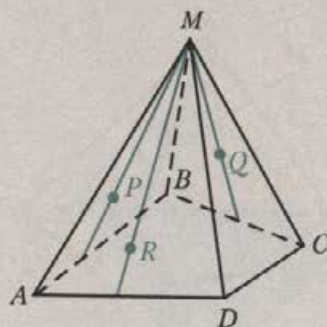
Точки B_1 и C_1 лежат соответственно на ребрах MB и MC , а точки P и Q — соответственно в гранях MAD и MBC .

Задание 19

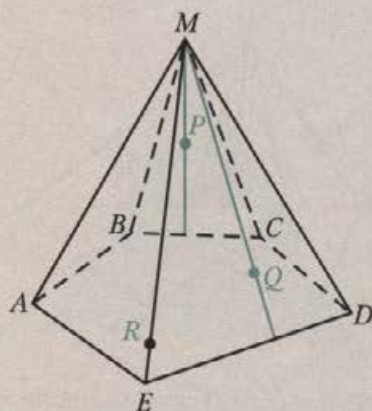
Постройте основной след секущей плоскости α , проходящей через точки P , Q и R .



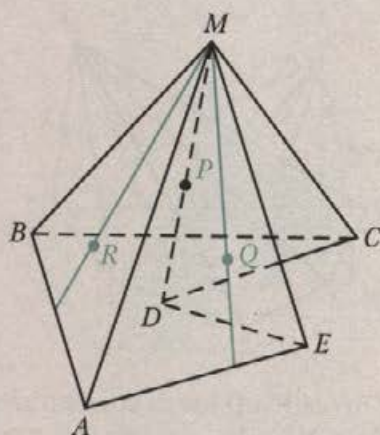
а) Точки P и Q соответственно на ребрах MA и MB , а точка R в грани MCD .



б) Точки P , Q и R соответственно в гранях MAB , MBC и MAD .



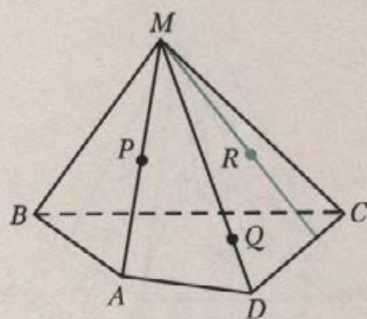
а) Точки P и Q соответственно в гранях MBC и MDE , а точка R на ребре ME .



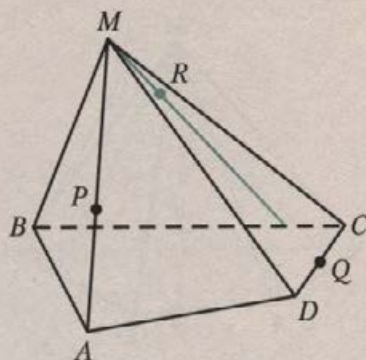
б) Точка P на ребре MD , а точка Q и R соответственно в гранях MAE и MAB .

Задание 20

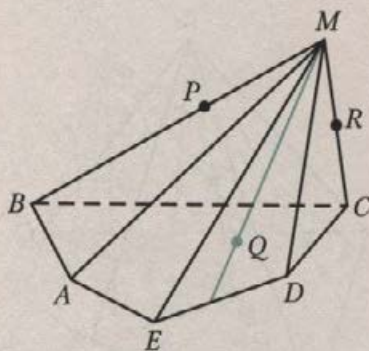
Постройте сечение пирамиды плоскостью α , проходящей через точки P , Q и R .



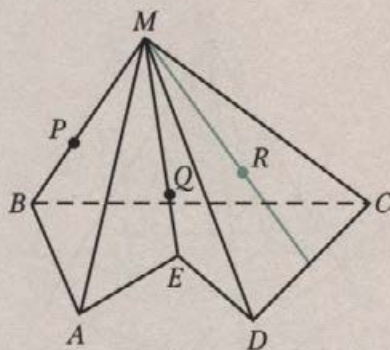
а) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MA и MD , а точка R — в грани MCD .



б) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MA и CD , а точка R — в грани MCD .

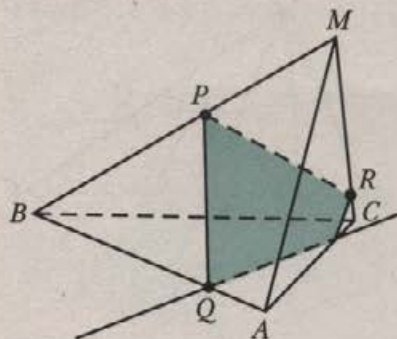


в) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MB и MC , а точка Q — в грани MDE .

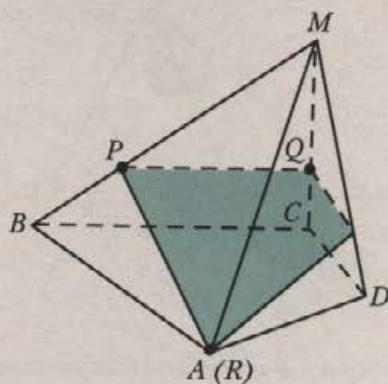


г) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MB и ME , а точка R — в грани MCD .

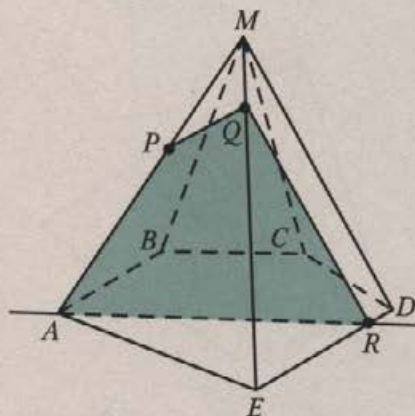
Укажите, на каких рисунках сечение пирамиды плоскостью PQR построено неправильно. Объясните ошибку.



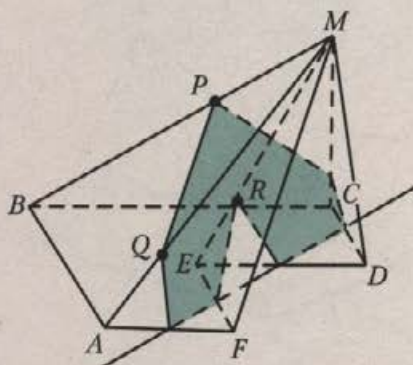
а) Точки P , Q и R взяты соответственно на ребрах MB , MA и BC .



б) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MB и MC , а точка R совпадает с точкой D .



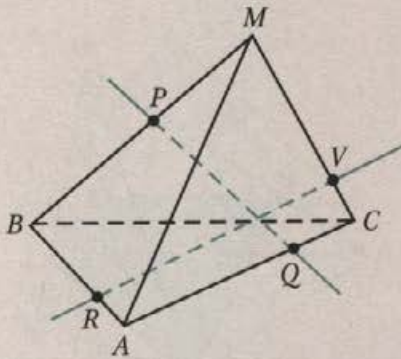
в) Точки P , Q и R взяты соответственно на ребрах MA , ME и ED .



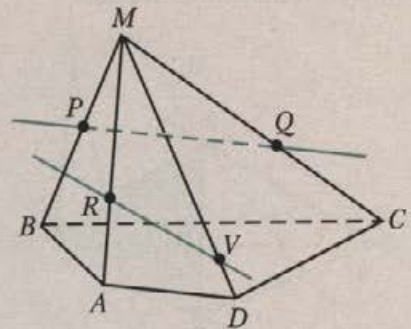
г) Точки P , Q и R взяты соответственно на ребрах MB , MA и ME .

Задание 22

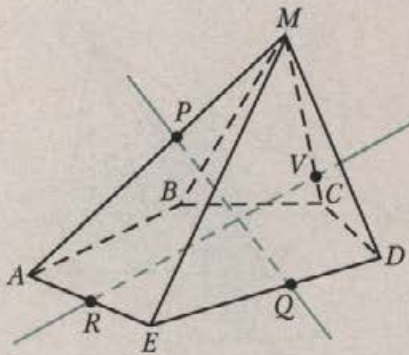
Выясните, пересекаются ли прямые PQ и RV .



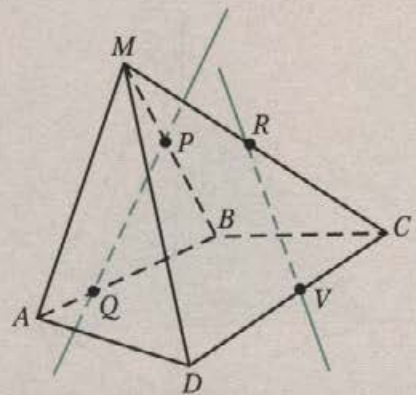
а) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MB и AC , а точки R и V — соответственно на ребрах AB и MC .



б) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MB и MC , а точки R и V — соответственно на ребрах MA и MD .



в) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MA и DE , а точки R и V — соответственно на ребрах AE и MC .

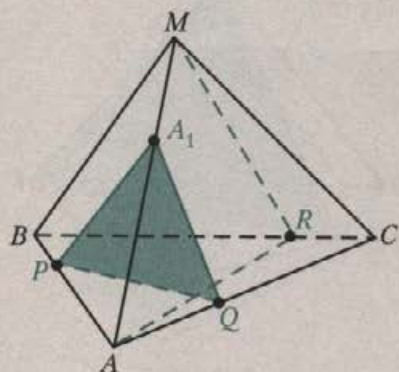


г) Точки P и Q взяты соответственно на ребрах MB и AB , а точки R и V — соответственно на ребрах MC и CD .

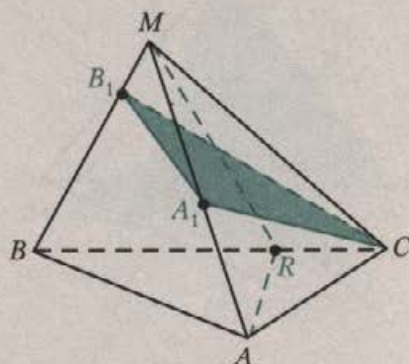
5. Построение пересечения прямых и плоскостей

Задание 23

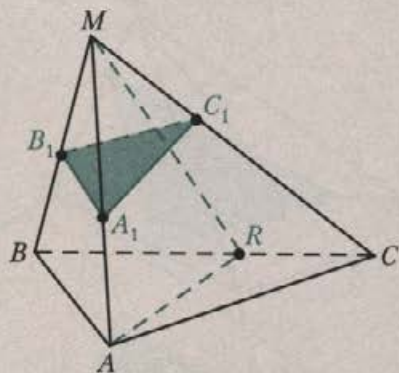
Постройте линии пересечения заданных плоскостей.



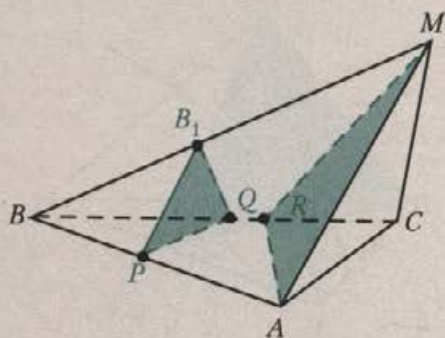
а) A_1PQ и MAR .



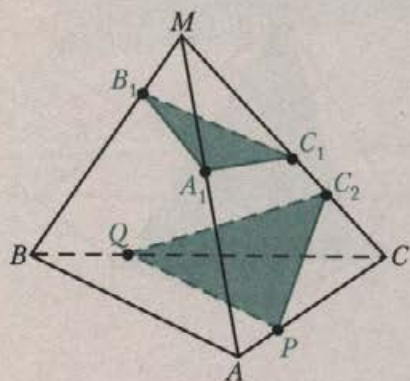
б) A_1B_1C и MAR .



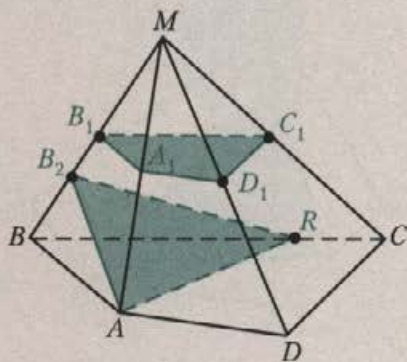
в) $A_1B_1C_1$ и MAR .



г) B_1PQ и MAR .



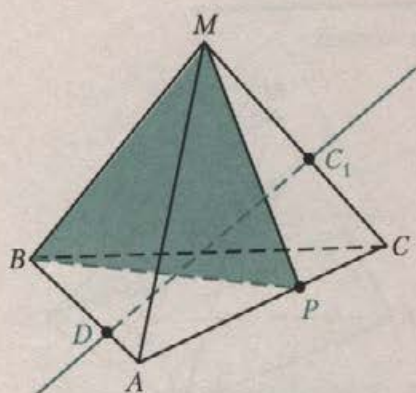
д) $A_1B_1C_1$ и C_2PQ .



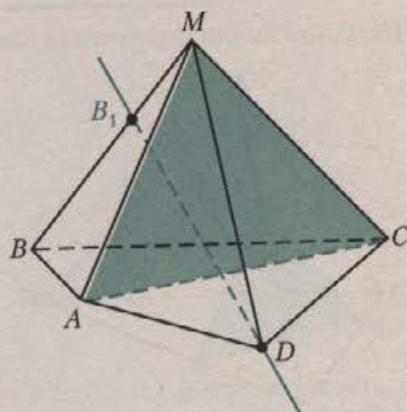
е) $A_1B_1C_1$ и B_2AR .

Задание 24

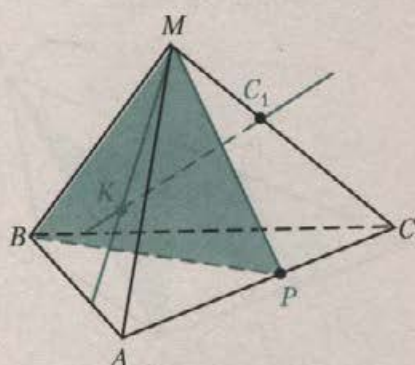
Постройте точки пересечения заданных прямых с заданными плоскостями.



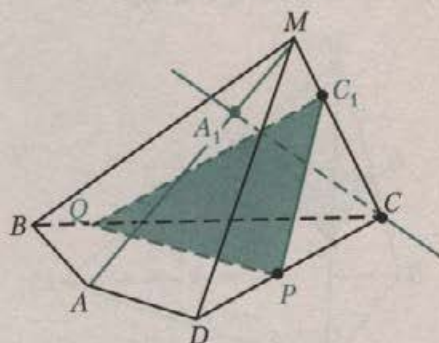
а) C_1D и MBP .



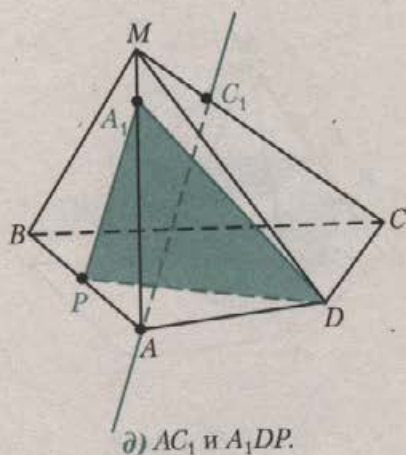
б) B_1D и MAC .



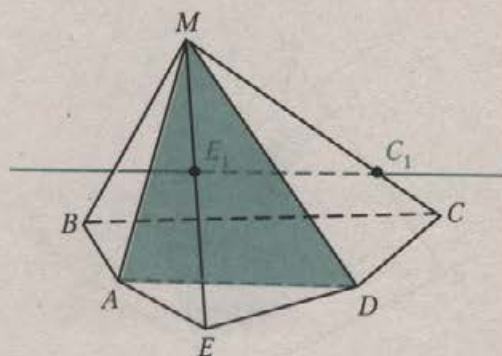
в) C_1K и MBP .



г) A_1C и C_1PQ .



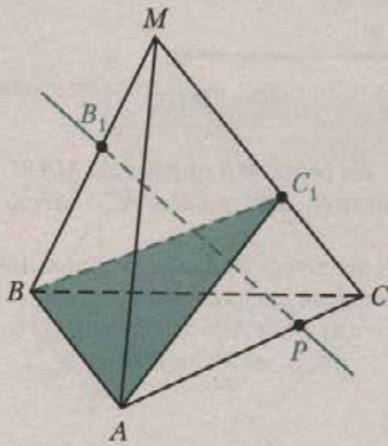
д) AC_1 и A_1DP .



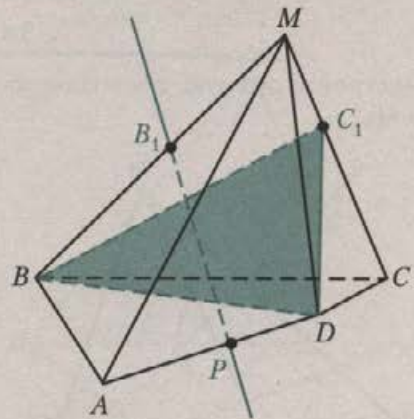
е) C_1E_1 и MAD .

Задание 25

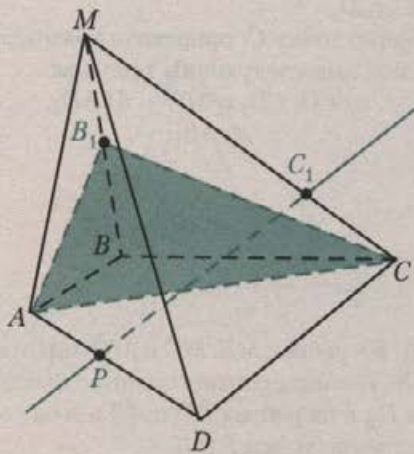
Постройте точки пересечения заданных прямых с заданными плоскостями.



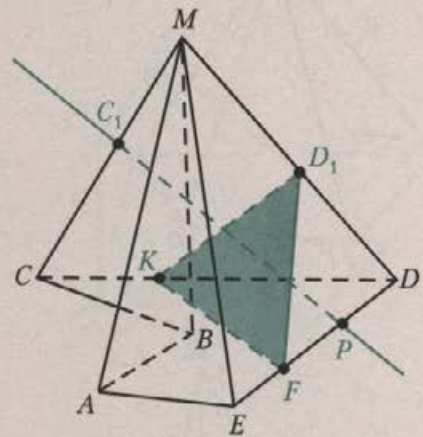
а) B_1P и C_1AB .



б) B_1P и C_1BD .



в) C_1P и B_1AC .

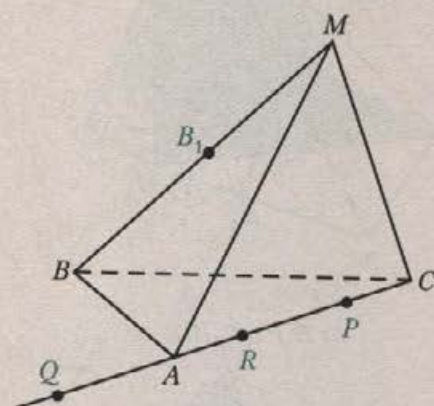


г) C_1P и D_1KF .

6. Построение прямой, параллельной заданной прямой

Задание 26

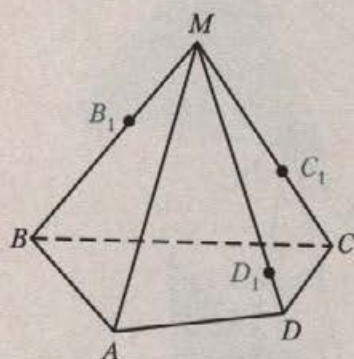
Постройте прямую, проходящую через заданную точку параллельно заданной прямой.



1. На ребре MB пирамиды $MABC$ взяты точка B_1 , а на прямой AC — точки P , Q и R .

Через точку B_1 проведите прямые, параллельные следующим прямым:

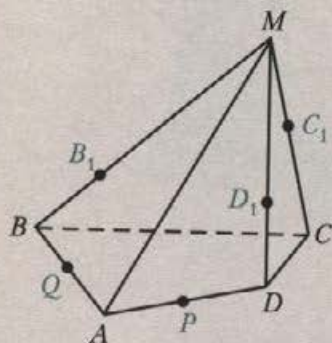
- а) BC и AB ; б) BP и BQ ;
в) MC и MR .



2. На ребрах MB , MC и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки B_1 , C_1 и D_1 .

Через точку C_1 проведите прямые, параллельные следующим прямым:

- а) CD , CD_1 и MD ; б) AD_1 ;
в) AB_1 .



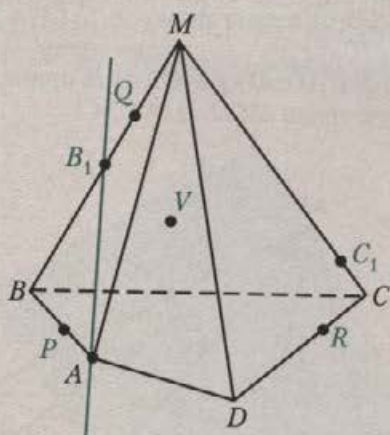
3. На ребрах MB , MC и MD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки B_1 , C_1 и D_1 , а на ребрах AD и AB взяты соответственно точки P и Q .

Через точку P проведите прямые, параллельные следующим прямым:

- а) B_1Q ; б) C_1D_1 ; в) B_1C_1 .

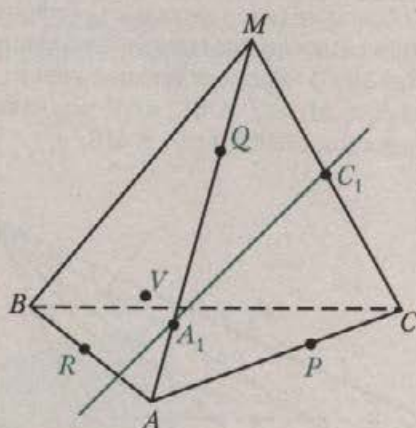
Задание 27

Постройте прямую, проходящую через заданную точку параллельно заданной прямой.



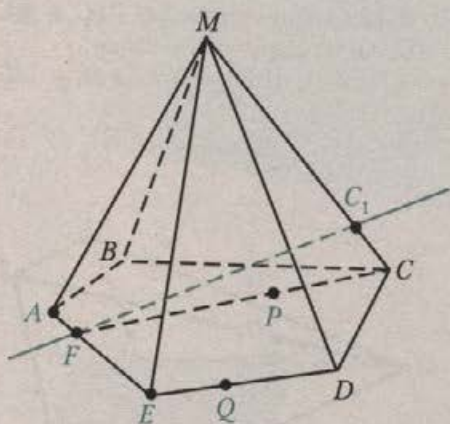
1. Параллельно прямой AB_1 ($B_1 \in MB$), через следующие точки:

а) $P \in AB$; б) $Q \in MB$; в) $R \in CD$;
г) $C_1 \in MC$; д) V , принадлежащую грани MBC .



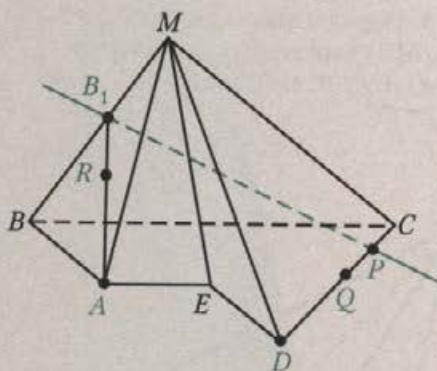
2. Параллельно прямой A_1C_1 ($A_1 \in MA$, $C_1 \in MC$) через следующие точки:

а) $P \in AC$; б) $Q \in MA$; в) $R \in AB$;
г) $C_1 \in MC$; д) V , принадлежащую грани MAB .



3. Параллельно прямой C_1F ($C_1 \in MC$, $F \in AE$) через следующие точки:

а) $P \in CF$; б) A ; в) E ; г) $Q \in DE$.



4. Параллельно прямой B_1P ($B_1 \in MB$, $P \in CD$) через следующие точки:

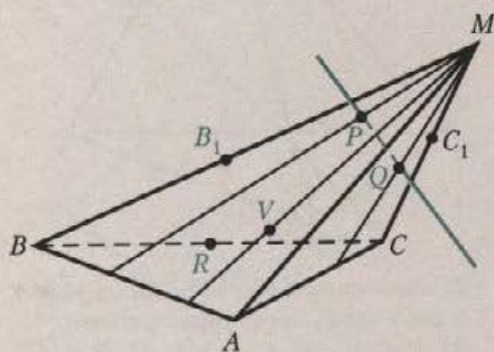
а) $Q \in CD$; б) D ; в) $R \in AB$; г) A .

Задание 28

Постройте прямую, проходящую через заданную точку параллельно заданной прямой.

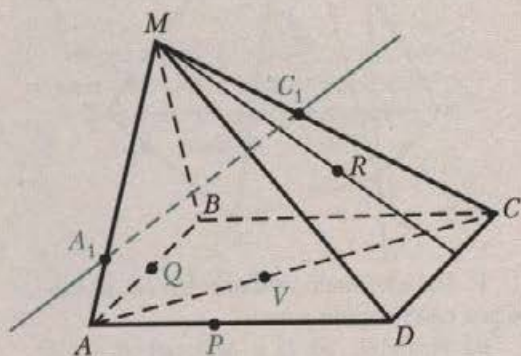
1. Параллельно прямой PQ (точки P и Q принадлежат соответственно граням MAV и MAC) через следующие точки:

а) $B_1 \in M$; б) $R \in BC$; в) V , принадлежащую грани MAV ; г) $C_1 \in MC$.



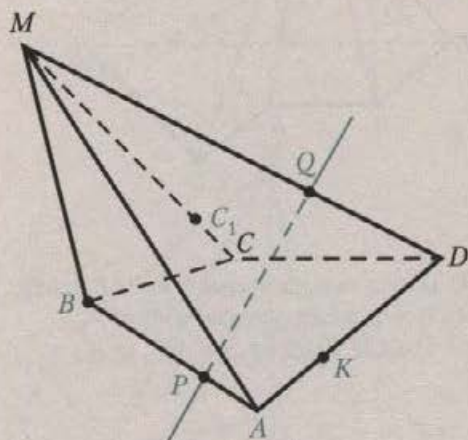
2. Параллельно прямой A_1C_1 ($A_1 \in MA$, $C_1 \in MC$) через следующие точки:

а) $P \in AD$; б) $Q \in AB$; в) R , принадлежащую грани MCD ; г) $V \in AC$.



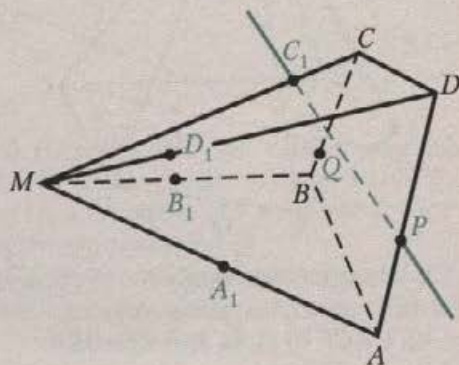
3. Параллельно прямой PQ ($P \in AB$, $Q \in MD$) через следующие точки:

а) A ; б) B ; в) $K \in AD$; г) $C_1 \in MC$.



4. Параллельно прямой C_1P ($C_1 \in MC$, $P \in AD$) через следующие точки:

а) $A_1 \in MA$; б) $B_1 \in MB$; в) $D_1 \in MD$; г) $Q \in BC$.

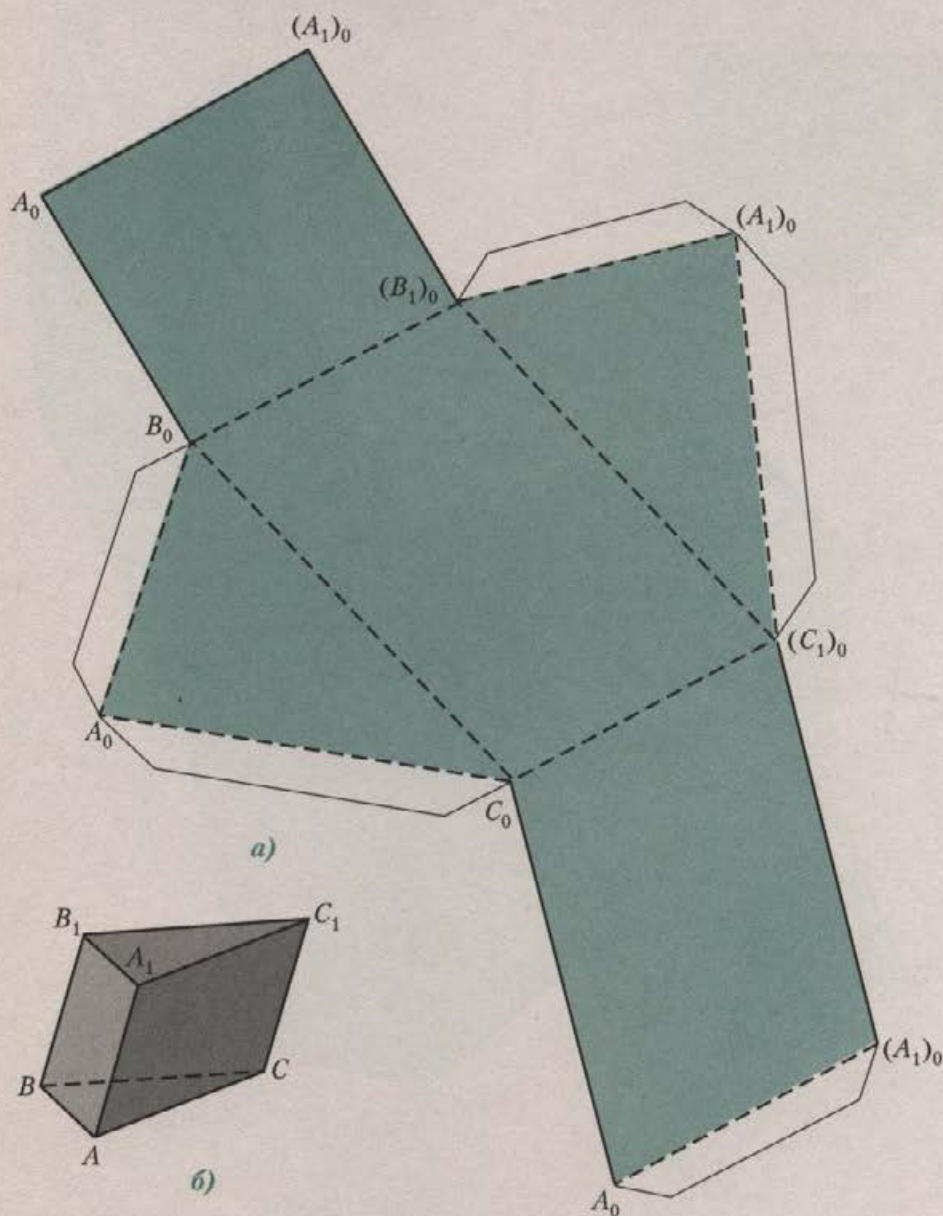


7. Развертка призмы. Модель призмы

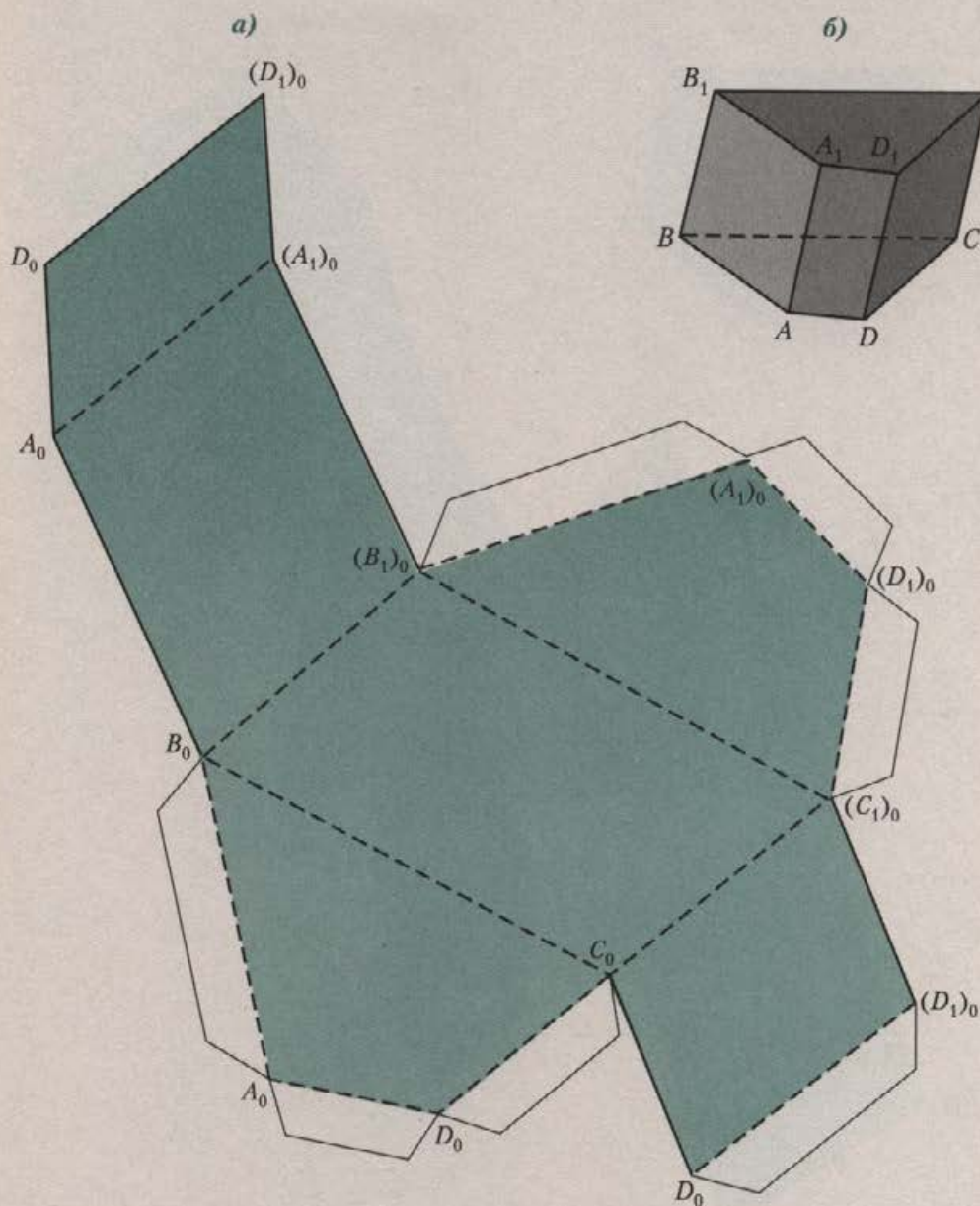
Задание 29

Вырежьте развертку модели призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. *a*), согните ее по линиям сгиба. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель призмы.

Нарисуйте склеенную модель. Сравните свой рисунок с рисунком *б*.

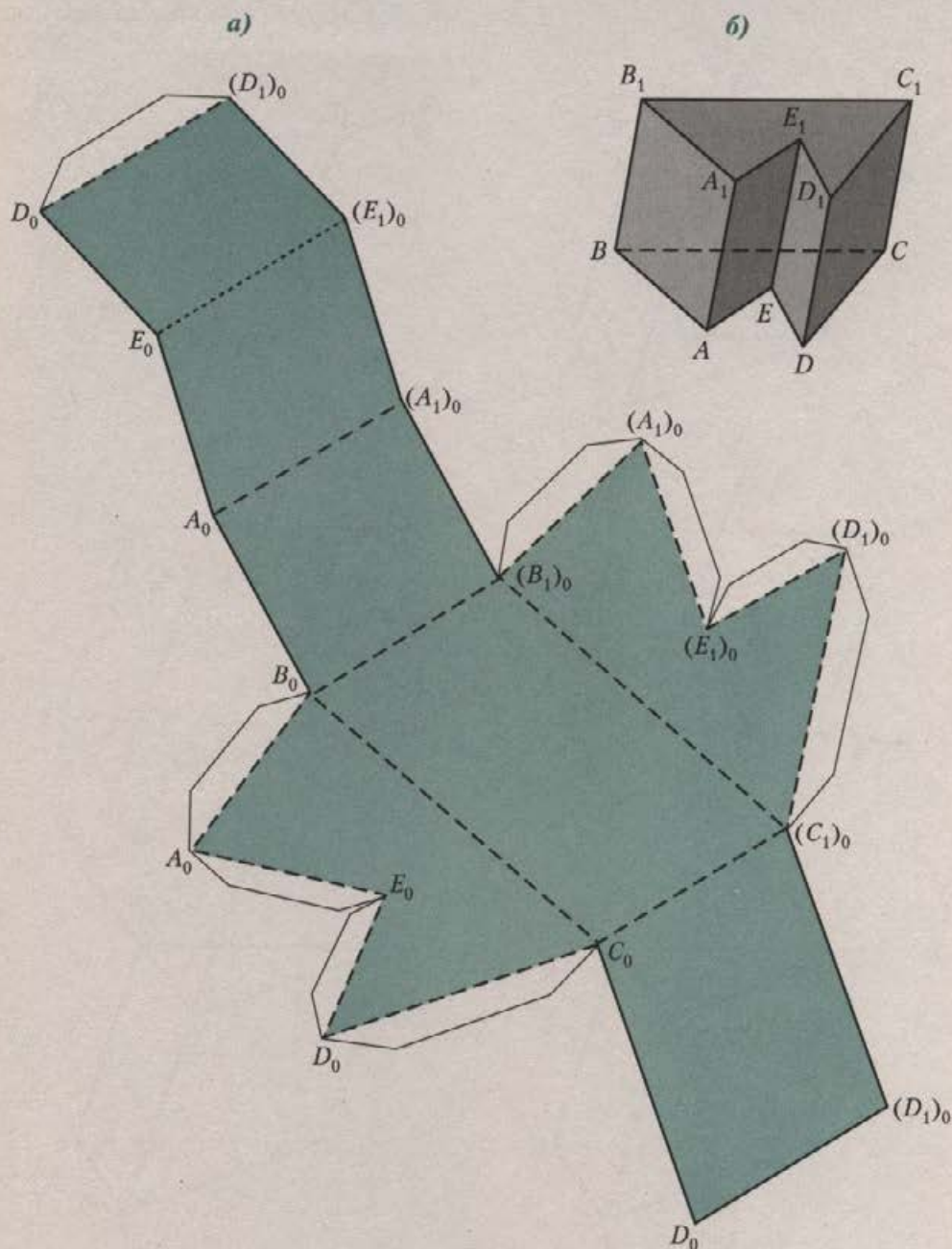


Вырежьте развертку модели призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. а), согните ее по линиям сгиба. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель призмы. Нарисуйте склеенную модель. Сравните свой рисунок с рисунком б).



Задание 31

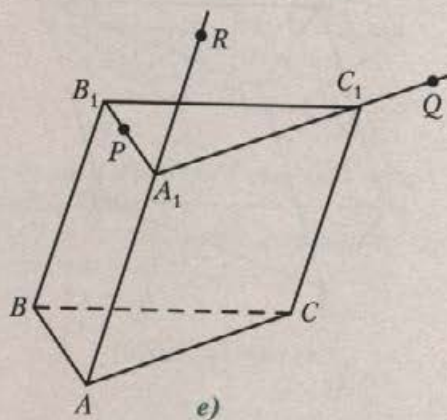
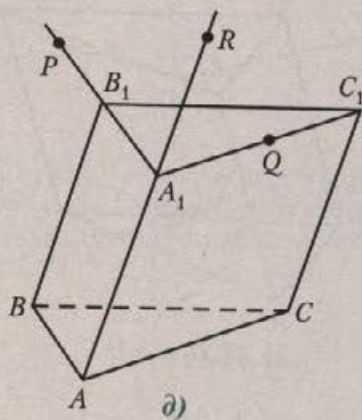
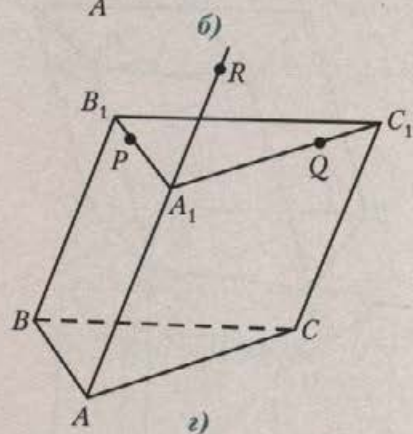
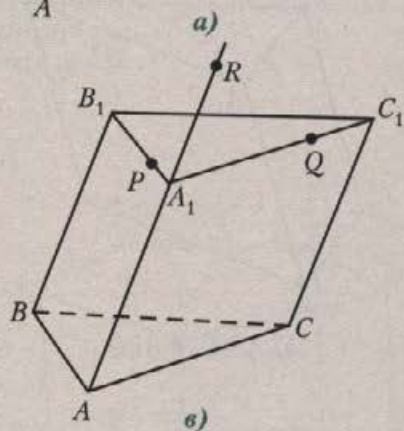
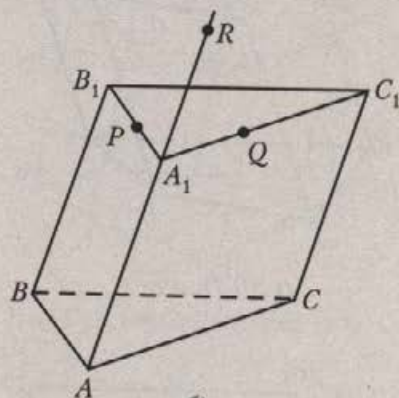
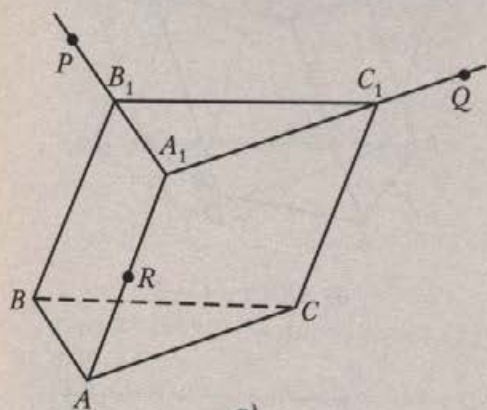
Вырежьте развертку модели призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. а), согните ее по линиям сгиба. Смажьте клеем незакрашенные выступы и склейте модель призмы. Нарисуйте склеенную модель. Сравните свой рисунок с рисунком б).



8. Построение сечения призмы

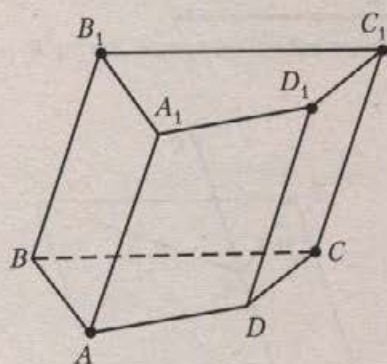
Задание 32

Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P , Q и R , лежащие соответственно на прямых A_1B_1 , A_1C_1 и A_1A .

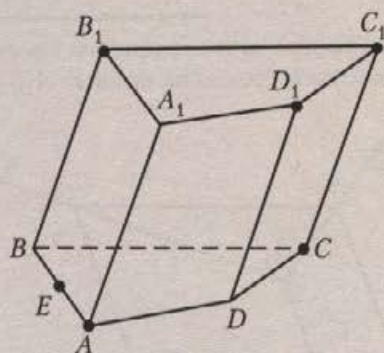


Задание 33

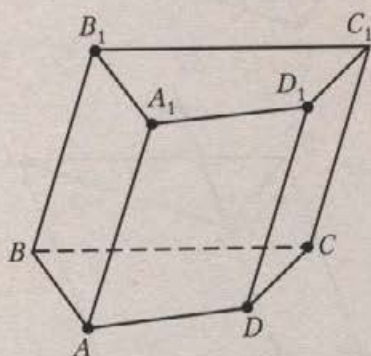
Постройте линию пересечения заданных секущих плоскостей призмы.



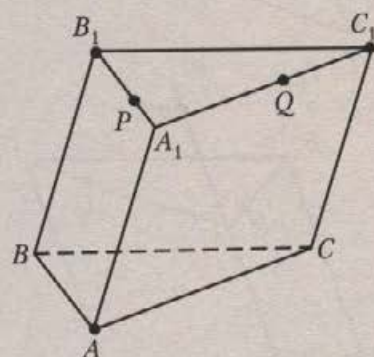
а) AB_1D_1 и ACC_1



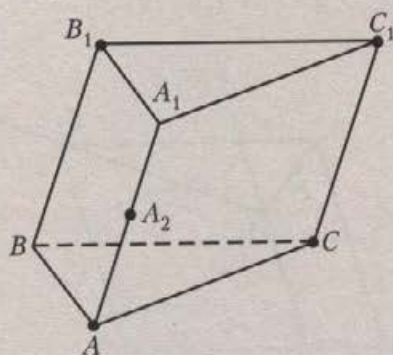
б) AB_1D_1 и C_1CE



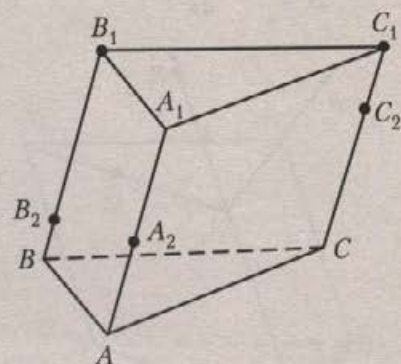
в) AB_1D_1 и A_1CD



г) AB_1C_1 и APQ



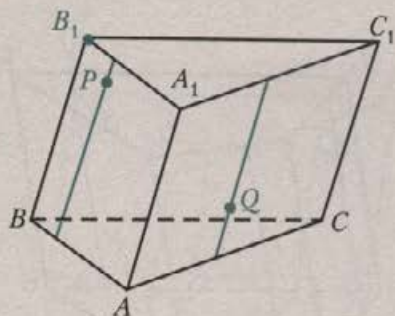
д) AB_1C_1 и $A_2B_1C_1$



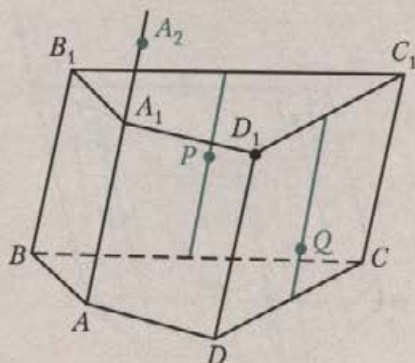
е) AB_2C_2 и $A_2B_1C_1$

Задание 34

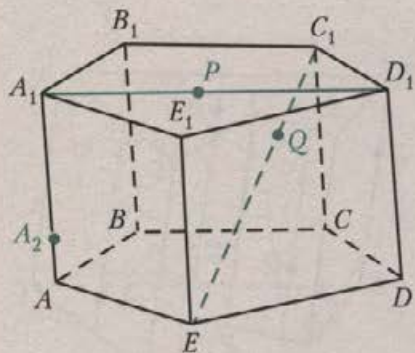
Постройте точки пересечения заданных прямых с плоскостью нижнего основания призмы.



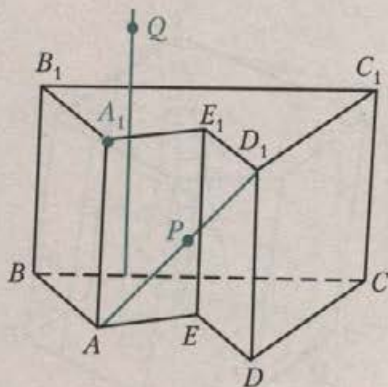
1. а) B_1P , точка P которой лежит в грани ABB_1A_1 ;
- б) B_1Q , точка Q которой лежит в грани ACC_1A_1 ;
- в) PQ .



2. а) D_1P , точка P которой лежит в грани BCC_1B_1 ;
- б) A_2P , точка A_2 которой лежит на прямой AA_1 ;
- в) PQ , точка Q которой лежит в грани CDD_1C_1 .



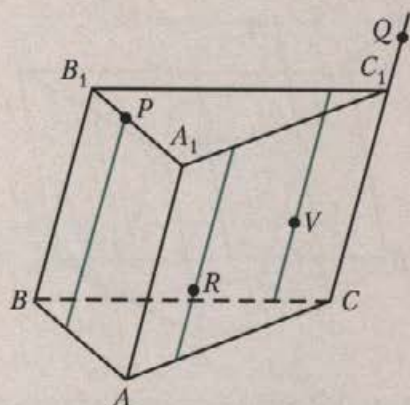
3. а) PA_2 , точка P которой лежит на отрезке A_1D_1 , а точка A_2 — на ребре AA_1 ;
- б) QA_2 , точка Q которой лежит на отрезке C_1E_1 ;
- в) PQ .



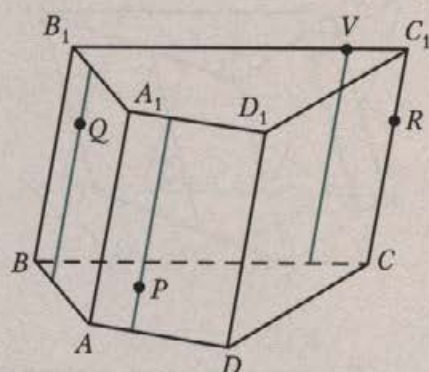
4. а) A_1P , точка P которой лежит на отрезке AD_1 ;
- б) A_1Q , точка Q которой лежит в плоскости грани BCC_1B_1 ;
- в) PQ .

Задание 35

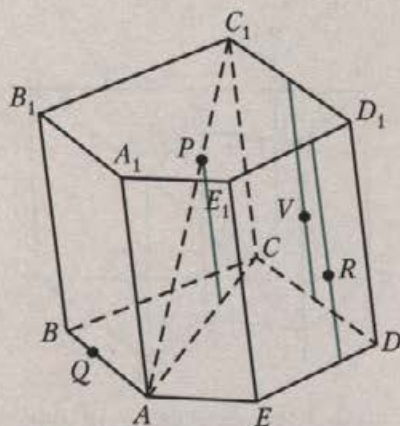
Постройте основной след плоскости PQR на плоскости ABC и основной след плоскости PQV на плоскости $A_1B_1C_1$.



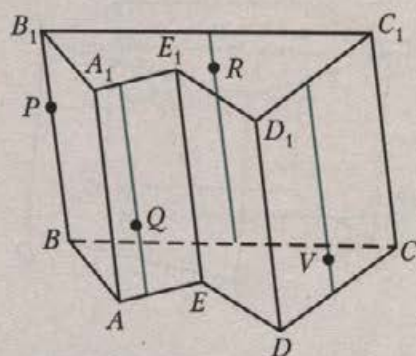
а) Точка P взята на ребре A_1B_1 , точка Q — на продолжении ребра CC_1 , а точки R и V — соответственно в гранях ACC_1A_1 и BCC_1B_1 .



б) Точки P и Q взяты соответственно в гранях ADD_1A_1 и ABB_1A_1 , а точки R и V — соответственно на ребрах CC_1 и B_1C_1 .

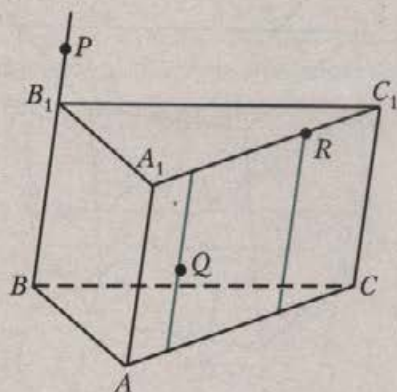


в) Точка P взята на отрезке AC_1 , точка Q — на ребре AB , а точки R и V — соответственно в гранях DEE_1D_1 и CDD_1C_1 .

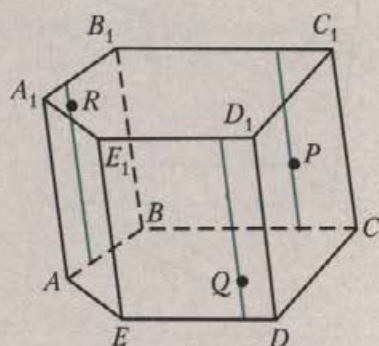


г) Точка P взята на ребре BB_1 , а точки Q , R и V — соответственно в гранях AEE_1A_1 , BCC_1B_1 и CDD_1C_1 .

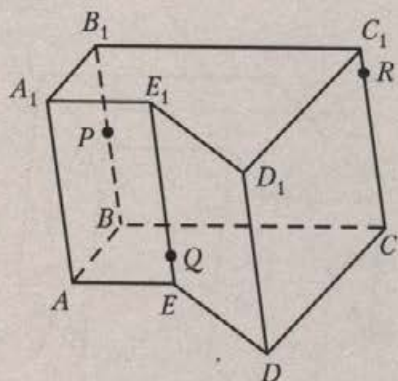
Постройте сечение призмы плоскостью PQR .



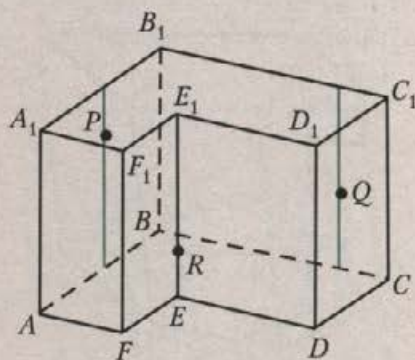
а) Точка P взята на продолжении ребра BB_1 , точка Q — в грани ACC_1A_1 , точка R — на ребре A_1C_1 .



б) Точки P , Q и R взяты соответственно в гранях BCC_1B_1 , DEE_1D_1 и ABB_1A_1 .



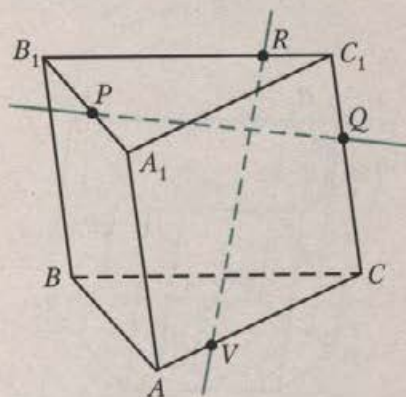
в) Точки P , Q и R взяты соответственно на ребрах BB_1 , EE_1 и CC_1 .



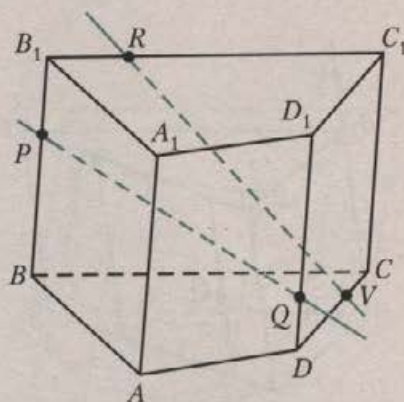
г) Точки P и Q взяты соответственно в гранях ABB_1A_1 и BCC_1B_1 , а точка R — на ребре EE_1 .

Задание 37

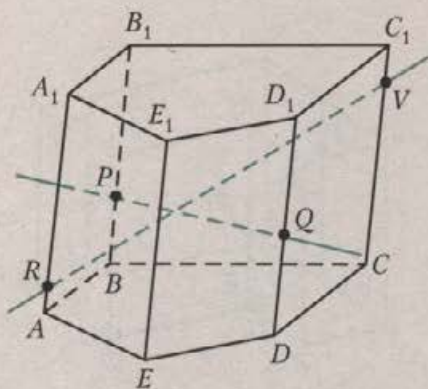
Выясните, пересекаются ли прямые PQ и RV .



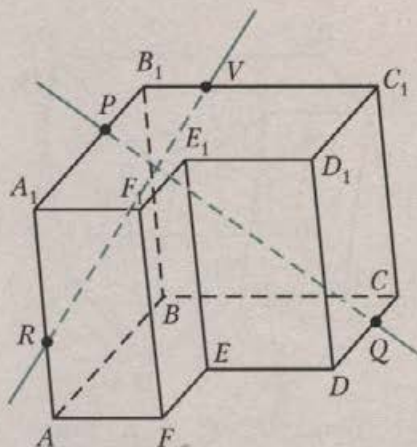
а) Точки P , Q , R и V взяты соответственно на ребрах A_1B_1 , CC_1 , B_1C_1 и AC .



б) Точки P , Q , R и V взяты соответственно на ребрах BB_1 , DD_1 , B_1C_1 и CD .



в) Точки P , Q , R и V взяты соответственно на ребрах BB_1 , DD_1 , AA_1 и CC_1 .

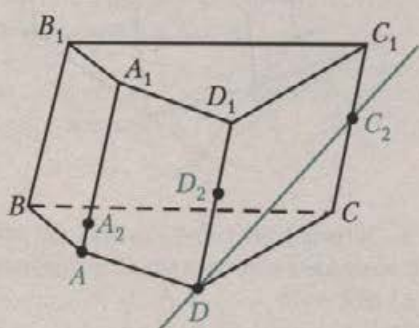


г) Точки P , Q , R и V взяты соответственно на ребрах A_1B_1 , CD , AA_1 и B_1C_1 .

9. Построение прямой, параллельной заданной прямой

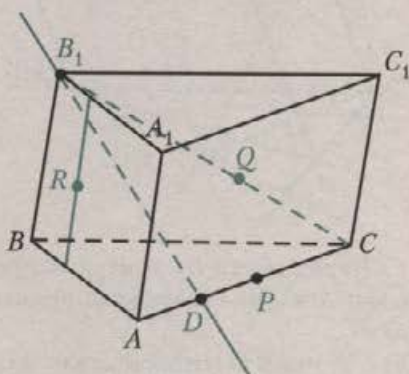
Задание 38

Постройте прямую, проходящую через заданную точку параллельно заданной прямой.



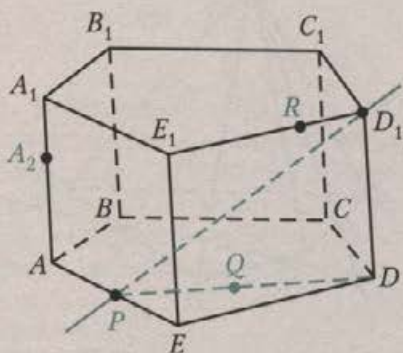
1. Параллельно прямой C_2D , точка C_2 которой лежит на ребре CC_1 , через следующие точки:

- а) D_2 , лежащую на ребре DD_1 ;
- б) A ;
- в) A_2 , лежащую на ребре AA_1 .



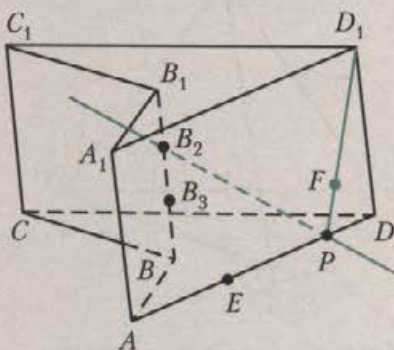
2. Параллельно прямой B_1D , точка D которой лежит на ребре AC , через следующие точки:

- а) P , лежащую на ребре AC ;
- б) Q , лежащую на отрезке B_1C ;
- в) R , лежащую в грани ABB_1A_1 .



3. Параллельно прямой D_1P , точка P которой лежит на ребре AE , через следующие точки:

- а) Q , лежащую на отрезке DP ;
- б) R , лежащую на ребре D_1E_1 ;
- в) A_2 , лежащую на ребре AA_1 .

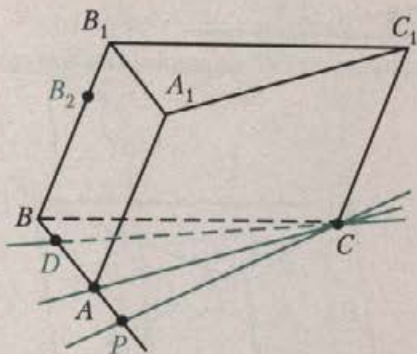


4. Параллельно прямой B_2P , точки B_2 и P которой лежат соответственно на ребрах BB_1 и AD , через следующие точки:

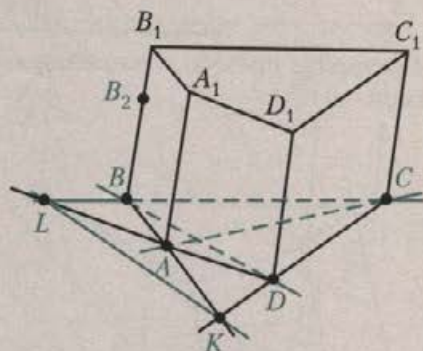
- а) E , лежащую на ребре AD ;
- б) B_3 , лежащую на ребре BB_1 ;
- в) F , лежащую на отрезке D_1P .

Задание 39

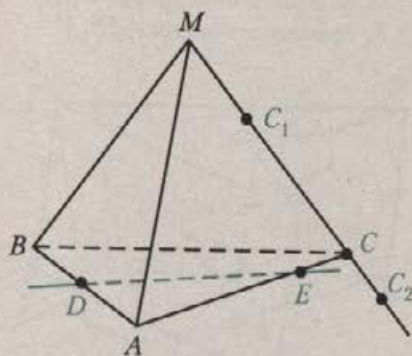
Используя теорему 6, проведите через заданную точку прямую, параллельную заданной прямой.



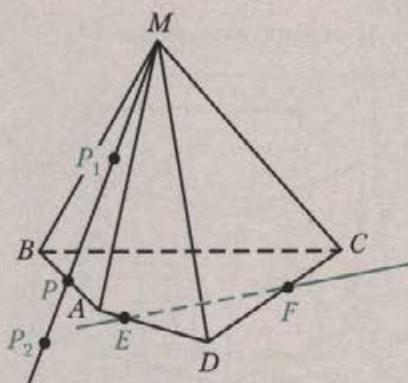
1. Через точку B_2 , взятую на ребре BB_1 , параллельно следующим прямым:
- AC ;
 - CD , точка D которой лежит на ребре AB ;
 - CP , точка P которой лежит на луче BA .



2. Через точку B_2 , взятую на ребре BB_1 , параллельно следующим прямым:
- AC ;
 - BD ;
 - KL , если $K = AB \cap CD$, $L = BC \cap AD$.



3. Параллельно прямой DE , точки D и E которой взяты соответственно на ребрах AB и AC , через следующие точки:
- C ;
 - C_1 , взятую на ребре MC ;
 - C_2 , взятую на луче MC .



4. Параллельно прямой EF , точки E и F которой взяты соответственно на ребрах AD и CD , через следующие точки:
- P , взятую на ребре AB ;
 - P_1 , взятую на отрезке MP ;
 - P_2 , взятую на луче MP .

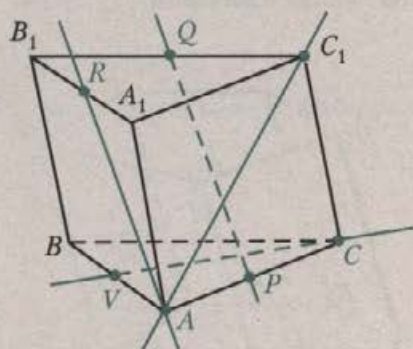
Выясните взаимное расположение заданных прямых.

1. На ребрах AC и B_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер. Выясните взаимное расположение прямой PQ со следующими прямыми:

а) AR , точка R которой является серединой отрезка A_1B_1 ;

б) AC_1 ;

в) CV , точка V которой является серединой отрезка AB .



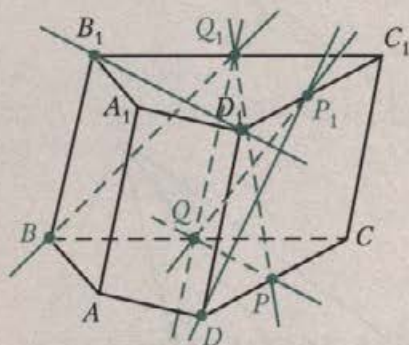
2. На ребрах CD , BC , C_1D_1 и B_1C_1 призмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P , Q , P_1 и Q_1 — середины этих ребер. Выясните взаимное расположение следующих пар прямых:

а) PQ_1 и QP_1 ;

б) PQ и B_1D_1 ;

в) DP_1 и BQ_1 ;

г) PQ и B_1D_1 .



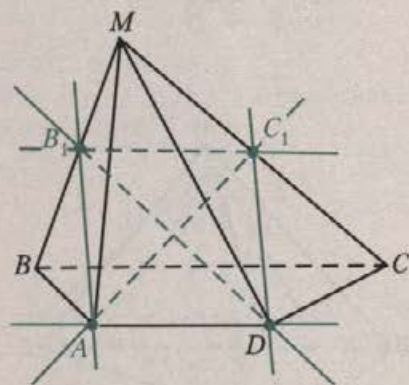
3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция с отношением параллельных сторон $AD : BC = 1 : 2$. На ребрах MB и MC взяты соответственно точки B_1 и C_1 — середины этих ребер. Выясните взаимное расположение следующих пар прямых:

а) AD и B_1C_1 ;

б) AB_1 и DC_1 ;

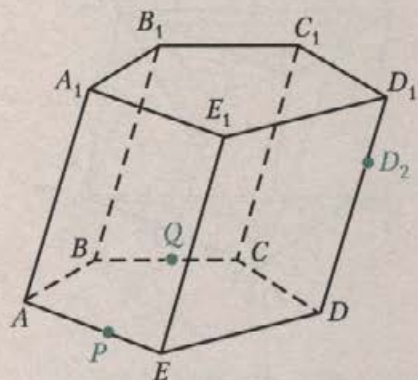
в) AC_1 и DB_1 ;

г) MC_1 и DB_1 .



Задание 41

Через заданную точку в данной плоскости проведите прямую, параллельную другой данной плоскости.

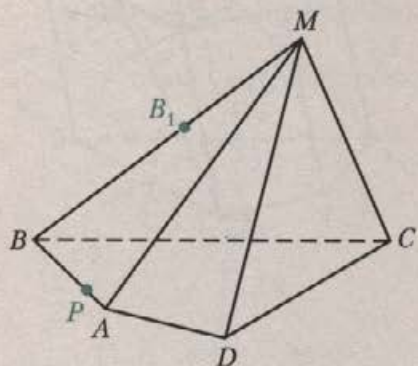


1. Многогранник $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ — призма.

а) Через точку P , взятую на ребре AE , проведите в плоскости AEE_1 прямые, параллельные плоскостям BCC_1 , CDD_1 и DEE_1 ;

б) Через точку Q , взятую на ребре BC , проведите в плоскости ABC прямые, параллельные плоскостям ACC_1 , CEE_1 и BDD_1 ;

в) Через точку D_2 , взятую на ребре DD_1 , проведите в плоскостях DEE_1 и DCC_1 прямые, параллельные плоскостям $A_1B_1C_1$.

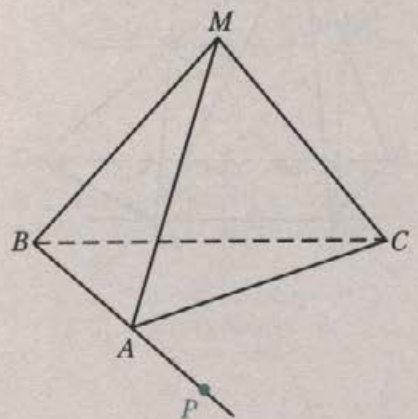


2. Многогранник $MABCD$ — пирамида. Через точку B_1 , взятую на ребре MB , проведите:

а) в плоскости MBC прямые, параллельные плоскостям MCD и MAD ;

б) в плоскости MAB прямые, параллельные плоскостям MAC и MDP , точка P которой взята на ребре AB ;

в) в плоскости MDB прямые, параллельные плоскостям MCD и ABC .



3. На продолжении ребра AB пирамиды $MABC$ взята точка P . Проведите через нее следующие прямые:

а) в плоскости ABC параллельно плоскости MBC ;

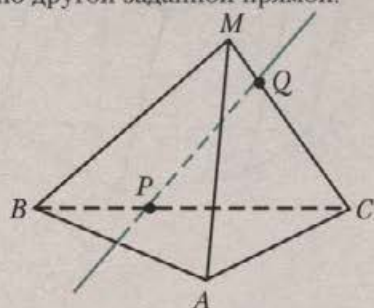
б) в плоскости MAB параллельно плоскости MBC ;

в) в плоскости MAB параллельно плоскости MAC .

10. Построение сечений, параллельных заданным прямым и плоскостям

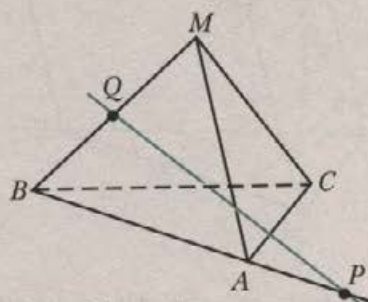
Задание 42

Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно другой заданной прямой.



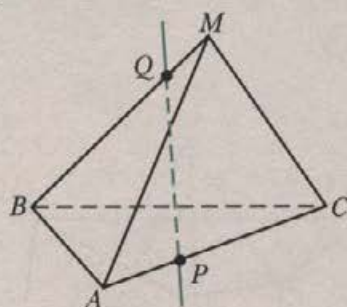
1. а) MA ; б) AB ; в) AC .

Точки P и Q взяты соответственно на ребрах BC и MC .



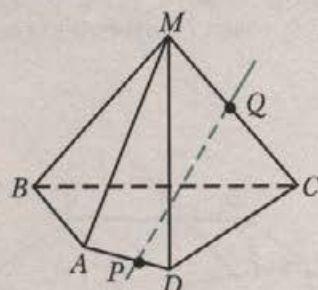
2. а) BC ; б) AC ; в) MC .

Точка P_1 взята на луче BA , точка Q — на ребре MB .



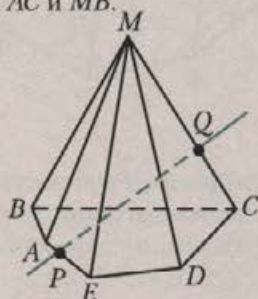
3. а) MA ; б) MC ; в) AB .

Точки P и Q взяты соответственно на ребрах AC и MB .



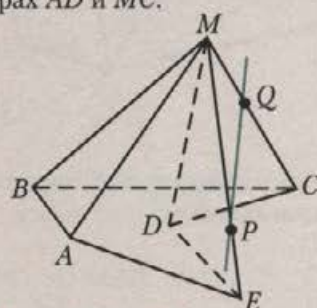
4. а) MD ; б) BC ; в) AC .

Точки P и Q взяты соответственно на ребрах AD и MC .



5. а) BC ; б) MD ; в) BE .

Точки P и Q взяты соответственно на ребрах AE и MC .

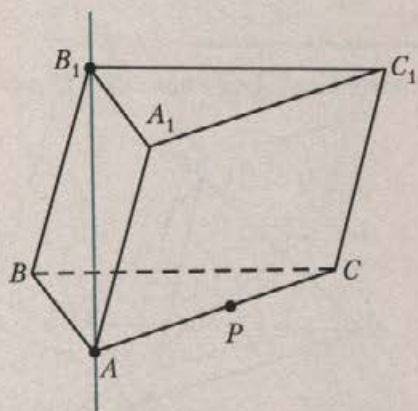


6. а) AB ; б) AE ; в) MD .

Точки P и Q взяты соответственно на ребрах ME и MC .

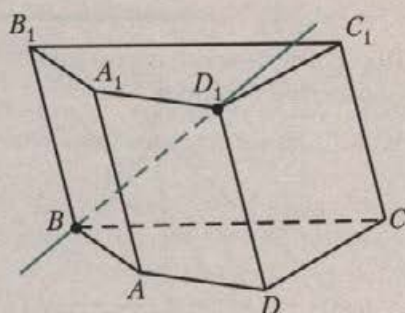
Задание 43

Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через заданную прямую параллельно другой заданной прямой.



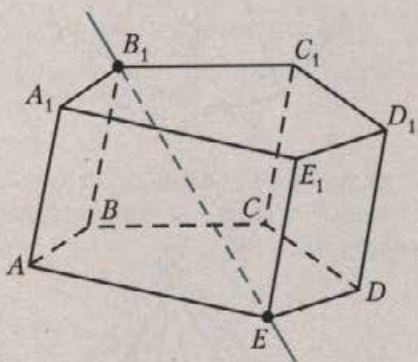
1. Через прямую AB_1 параллельно следующим прямым:

- а) BC ;
- б) A_1C_1 ;
- в) C_1P , точка P которой взята на ребре AC .



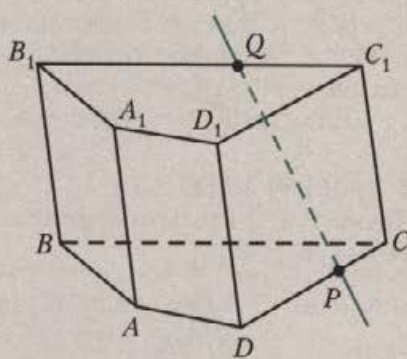
2. Через прямую BD_1 параллельно следующим прямым:

- а) AD ;
- б) CD ;
- в) A_1B_1 .



3. Через прямую B_1E параллельно следующим прямым:

- а) BC ;
- б) AC ;
- в) BD .

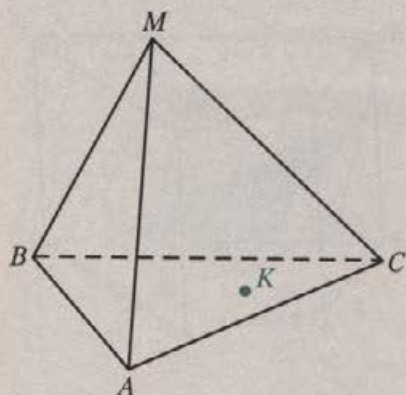


4. Через прямую PQ , точки P и Q которой взяты соответственно на ребрах CD и B_1C_1 , параллельно следующим прямым:

- а) AD ;
- б) AC ;
- в) CD_1 .

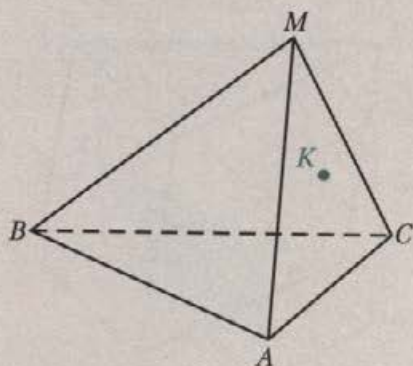
Задание 44

Постройте сечение пирамиды плоскостью α , проходящей через точку K параллельно другой заданной плоскости.



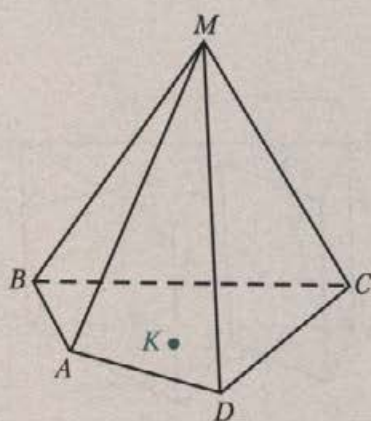
1. Точка K взята в грани ABC , плоскость α параллельна следующим плоскостям:

а) MAB ; б) MBC ; в) MAC .



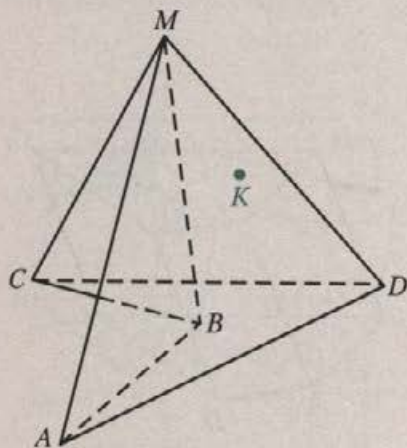
2. Точка K взята в грани MAC , плоскость α параллельна следующим плоскостям:

а) ABC ; б) MBC ; в) MAB .



3. Точка K взята в грани $ABCD$, плоскость α параллельна следующим плоскостям:

а) MAC ; б) MAB ; в) MBC .

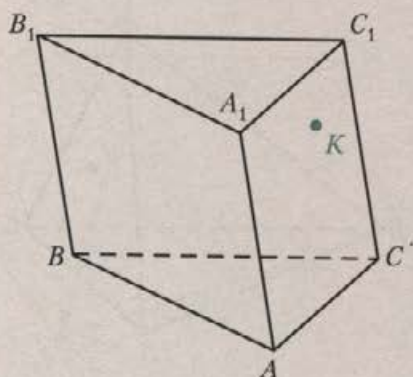


4. Точка K взята в грани MAD , плоскость α параллельна следующим плоскостям:

а) ABC ; б) MAB ; в) MCD .

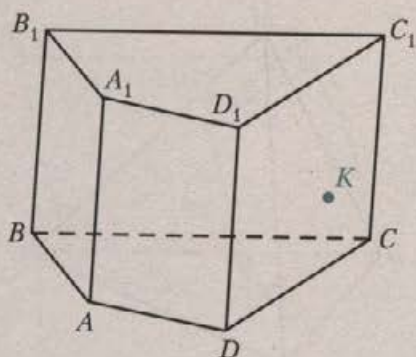
Задание 45

Постройте сечение призмы плоскостью α , проходящей через точку K параллельно другой заданной плоскости.



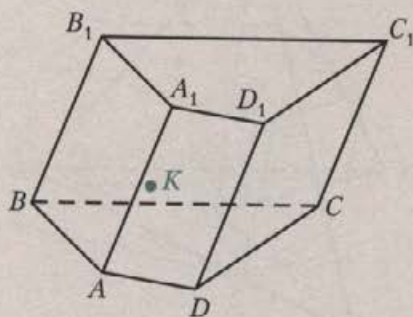
1. Точка K взята в грани ACC_1A_1 , плоскость α параллельна следующим плоскостям:

а) ABC ; б) BCC_1 ; в) ABB_1 .



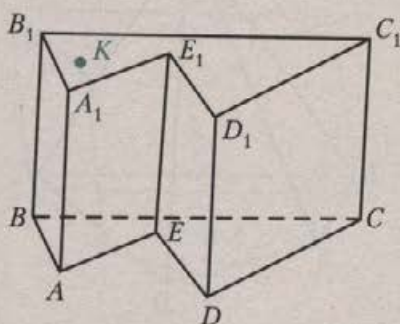
2. Точка K взята в грани CDD_1C_1 , плоскость α параллельна следующим плоскостям:

а) ABC ; б) BCC_1 ; в) ADD_1 ;
г) ABB_1 ; д) A_1DC ; е) A_1DC_1 .



3. Точка K взята в грани ADD_1A_1 , плоскость α параллельна следующим плоскостям:

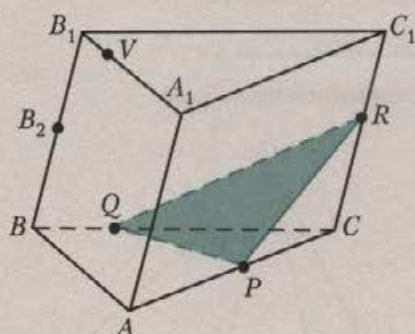
а) D_1AB ; б) A_1CD ; в) D_1BC ;
г) D_1AC ; д) A_1BD ; е) B_1AC ;
ж) C_1BD .



4. Точка K взята в грани $A_1B_1C_1D_1E_1$, плоскость α параллельна следующим плоскостям:

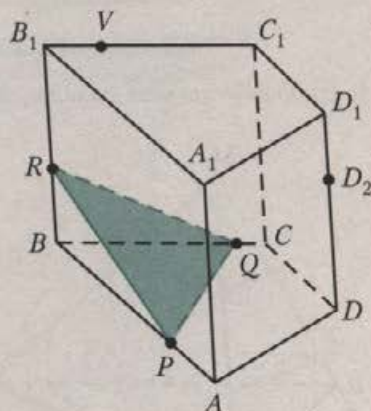
а) ACC_1 ; б) AEE_1 ; в) C_1E_1D ;
г) B_1BD ; д) ADD_1 .

Постройте сечение призмы плоскостью α , проходящей через заданную точку параллельно плоскости PQR .



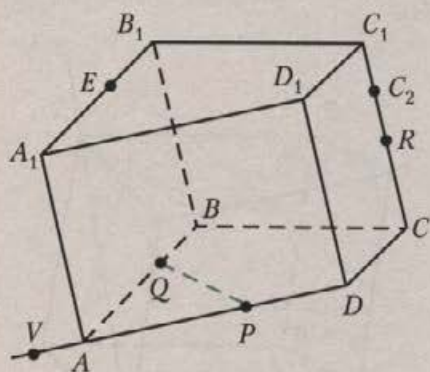
1. Точки P, Q и R взяты соответственно на ребрах AC, BC и CC_1 , плоскость α проходит через следующие точки:

- A ;
- B_2 , взятую на ребре BB_1 ;
- V , взятую на ребре A_1B_1 .



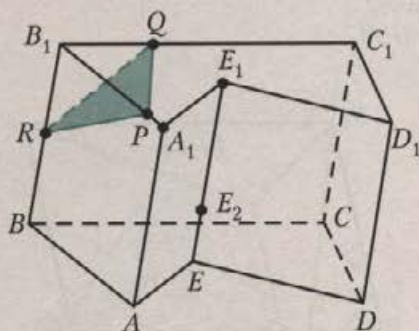
2. Точки P, Q и R взяты соответственно на ребрах AB, BC и BB_1 , плоскость α проходит через следующие точки:

- A ;
- V , взятую на ребре B_1C_1 ;
- D_2 , взятую на ребре DD_1 .



3. Точки P, Q и R взяты соответственно на ребрах AD, AB и CC_1 , плоскость α проходит через следующие точки:

- C_2 , взятую на ребре CC_1 ;
- E , взятую на ребре A_1B_1 ;
- V , взятую на прямой AD .



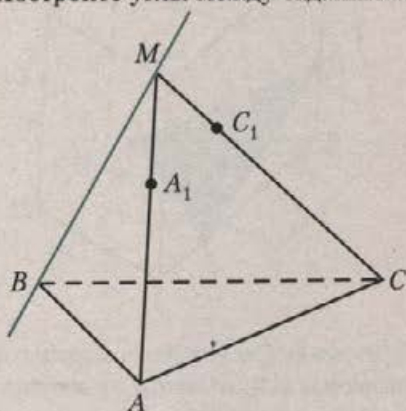
4. Точки P, Q и R взяты соответственно на ребрах A_1B_1, B_1C_1 и BB_1 , плоскость α проходит через следующие точки:

- A_1 ;
- E_1 ;
- E_2 , взятую на прямой EE_1 .

11. Построение угла между скрещивающимися прямыми

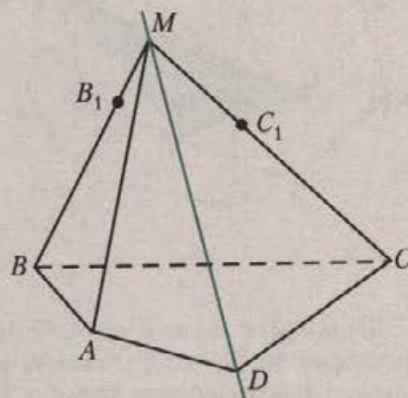
Задание 47

Постройте углы между заданными скрещивающимися прямыми.



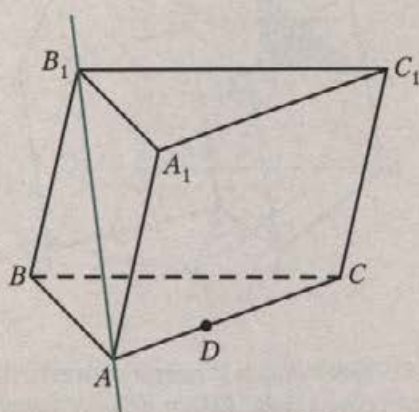
1. Между MB и прямой:

- AC_1 , точка C_1 которой взята на ребре MC ;
- CA_1 , точка A_1 которой взята на ребре MA ;
- AC .



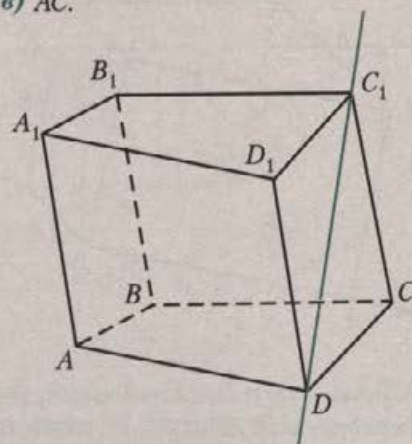
2. Между MD и прямой:

- AC_1 , точка C_1 которой взята на ребре MC ;
- CB_1 , точка B_1 которой взята на ребре MB ;
- AC .



3. Между AB_1 и прямой:

- BC ;
- A_1C ;
- C_1D , точка D которой взята на ребре AC .



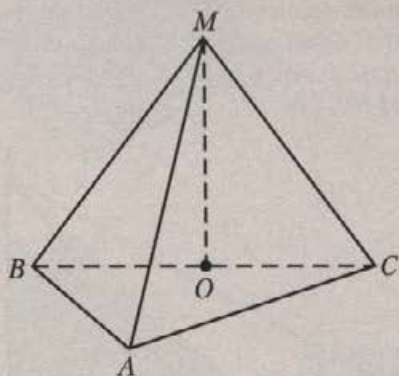
4. Между C_1D и прямой:

- BC ;
- AC ;
- B_1C .

12. Модели заданных многогранников

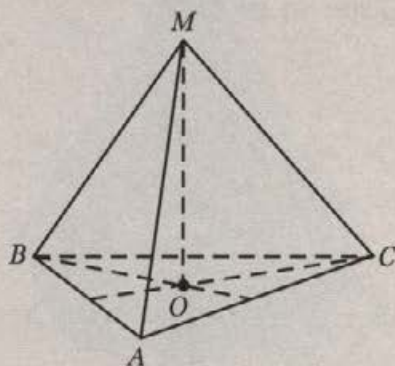
Задание 48

Постройте на плотной бумаге развертки моделей заданных пирамид. Вырежьте полученные развертки и склейте модели этих пирамид.



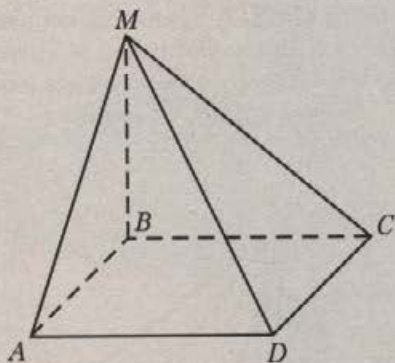
1. Основание пирамиды — правильный треугольник, точка O — середина ребра BC , отрезок MO перпендикулярен плоскости ABC и равен:

- а) стороне основания;
- б) медиане основания;
- в) $\frac{2}{3}$ медианы основания.



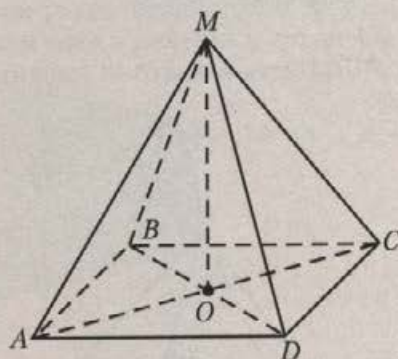
2. Пирамида $MABC$ — правильная. Ее высота равна:

- а) стороне основания;
- б) медиане основания;
- в) $\frac{1}{3}$ медианы основания.



3. В основании пирамиды прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 3$. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости ABC и равно:

- а) стороне AB ; б) стороне BC ;
- в) диагонали BD .



4. Пирамида $MABCD$ — правильная. Ее боковое ребро равно:

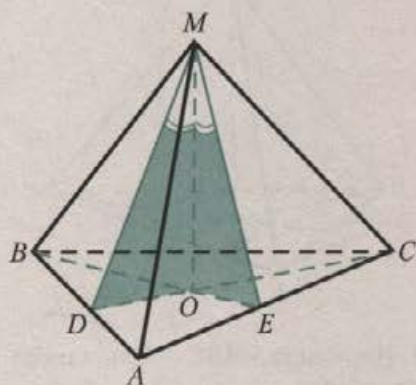
- а) диагонали основания;
- б) стороне основания;
- в) удвоенной высоте пирамиды.

Задание 49

Постройте на плотной бумаге развертки моделей заданных пирамид. Вырежьте полученные развертки и склейте модели этих пирамид.

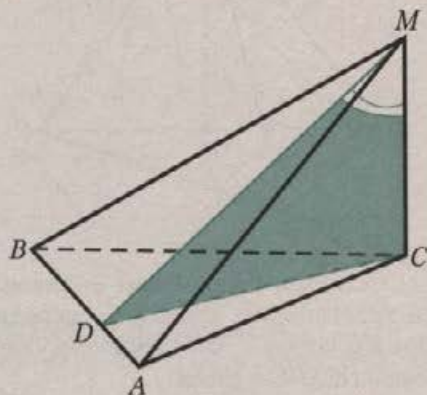
1. Пирамида $MABC$ — правильная. Угол между апофемой ее боковой грани и высотой пирамиды равен:

а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .



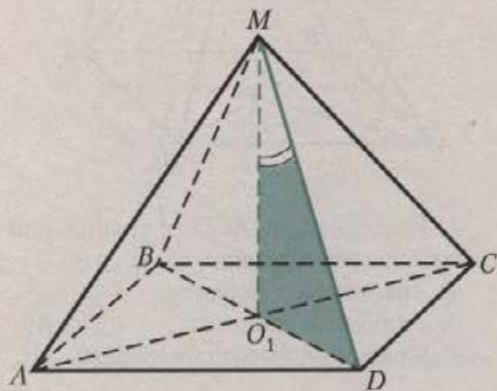
2. Основание пирамиды — треугольник с отношением сторон $AC : BC : AB = 3 : 4 : 5$. Боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания, а угол между апофемой грани MAB и высотой пирамиды равен:

а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .



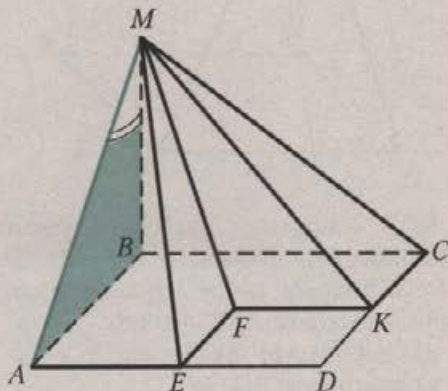
3. Основанием пирамиды является прямоугольник с отношением сторон, равным $1 : 2$. Высота пирамиды проектируется в центр основания, а угол между боковым ребром и высотой пирамиды равен:

а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .



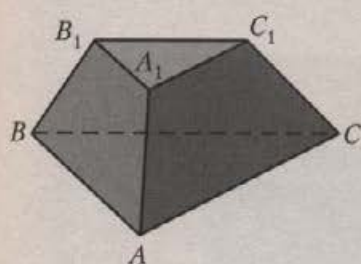
4. Из квадрата $ABCD$ удалили квадрат $EFKD$, у которого $ED = \frac{1}{2}AD$. Многоугольник $ABCEFK$ принят за основание пирамиды. Ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и образует с ребром MA угол, равный:

а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .

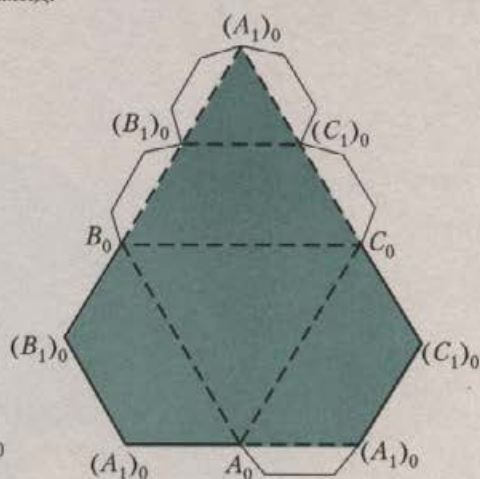


Задание 50

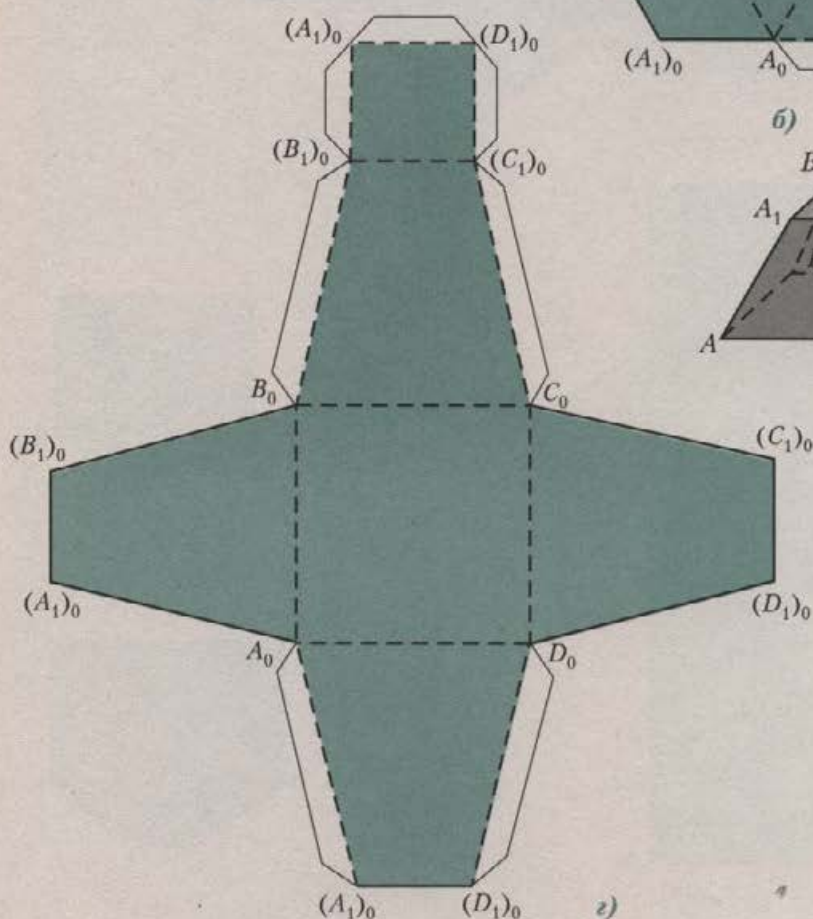
На рисунках *а)* и *в)* изображены правильные треугольная и четырехугольная усеченные пирамиды, а на рисунках *б)* и *г)* — развертки моделей этих пирамид. Вырежьте развертки и склейте модели пирамид.



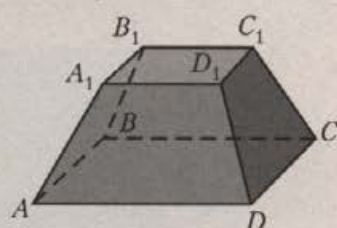
а)



б)

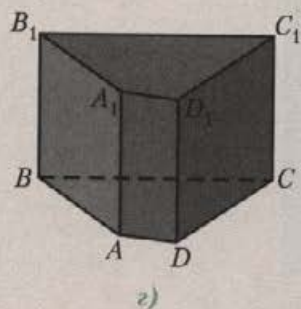
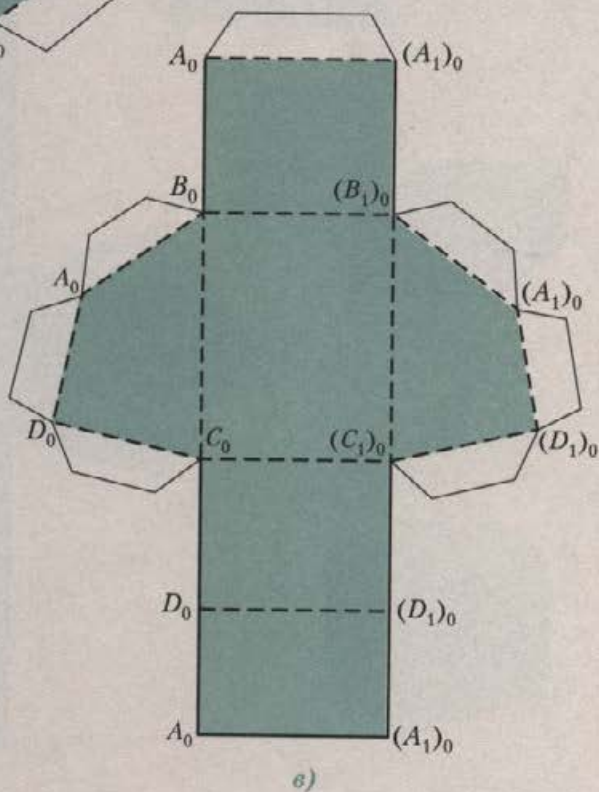
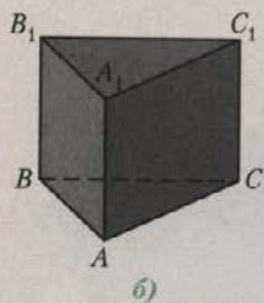
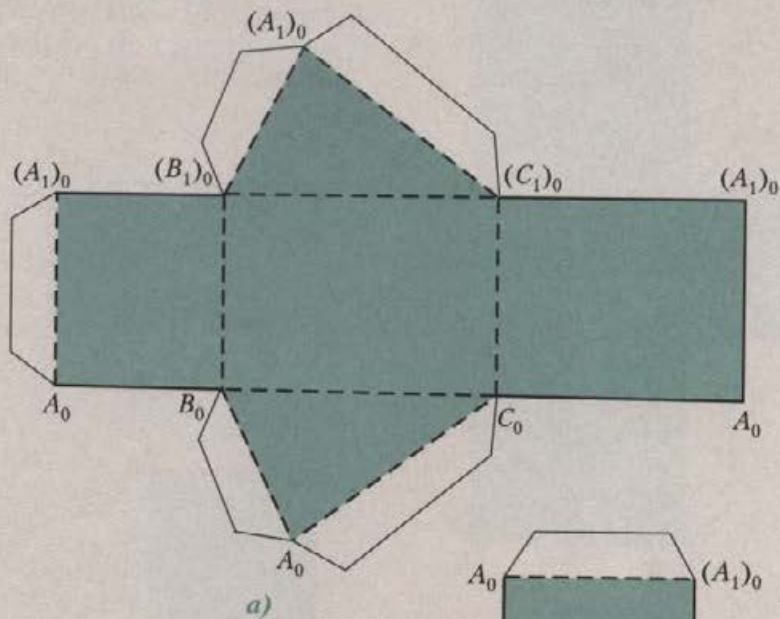


г)

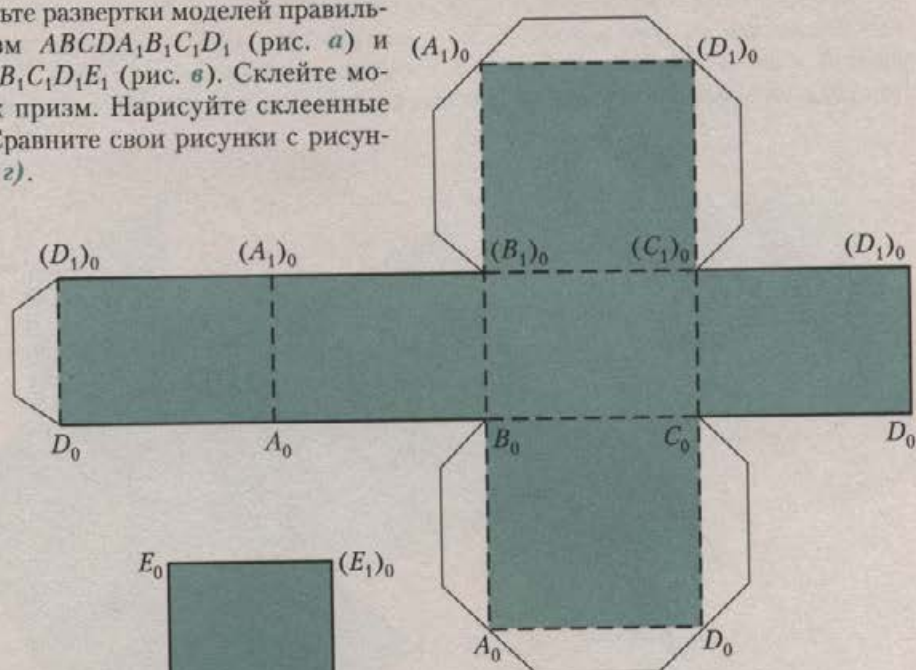


в)

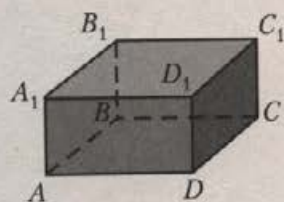
Вырежьте развертки моделей прямых призм $ABCA_1B_1C_1$ (рис. а) и $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. в). Склейте модели этих призм. Нарисуйте склеенные модели. Сравните свои рисунки с рисунками б) и г).



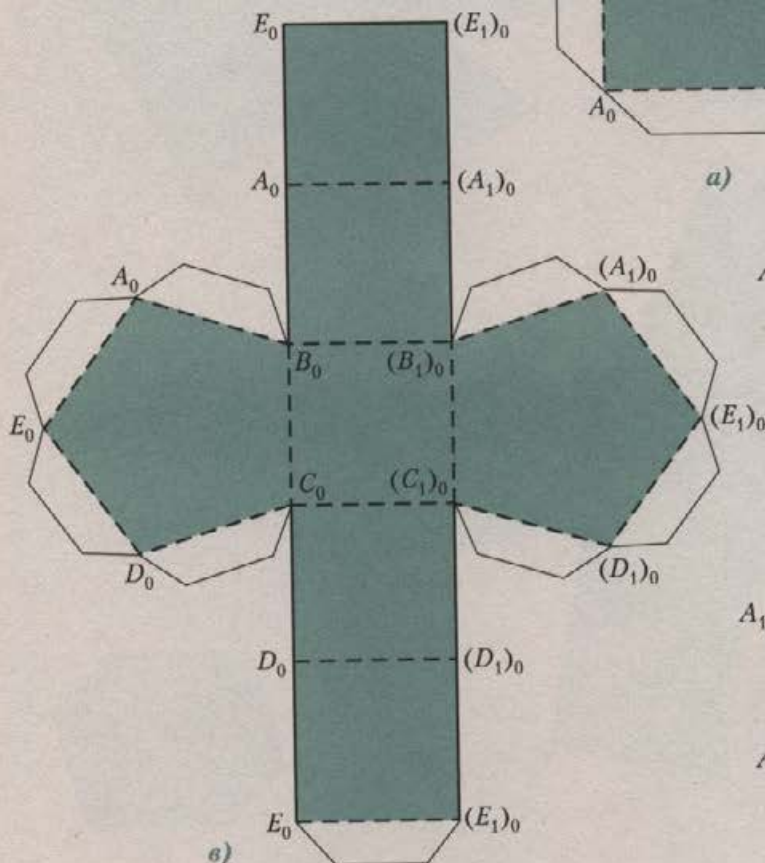
Вырежьте развертки моделей правильных призм $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. а) и $ABCDE A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ (рис. в). Склейте модели этих призм. Нарисуйте склеенные модели. Сравните свои рисунки с рисунками б) и з).



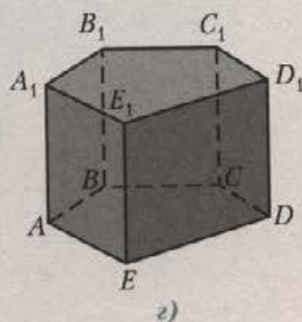
а)



б)

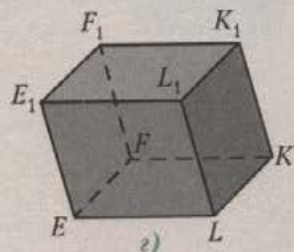
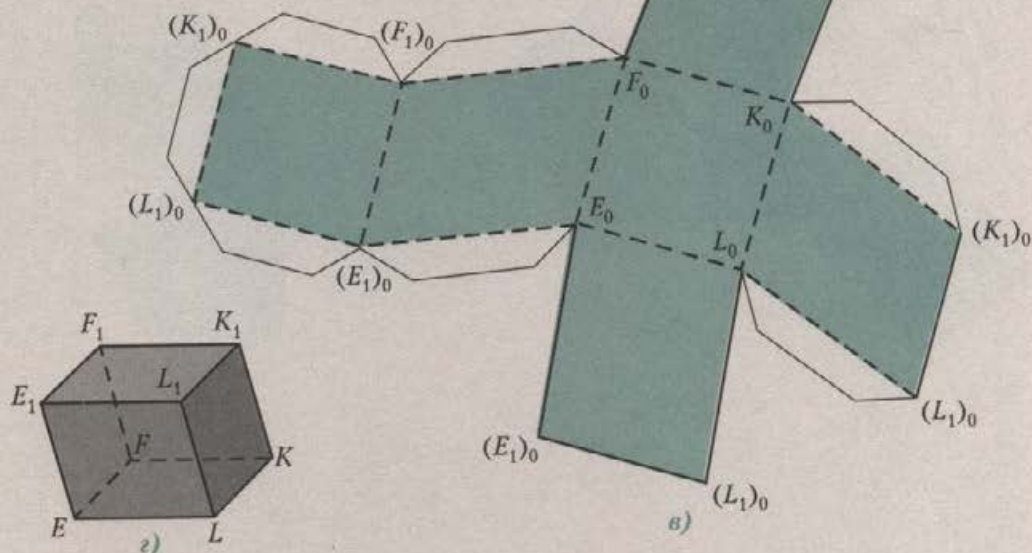
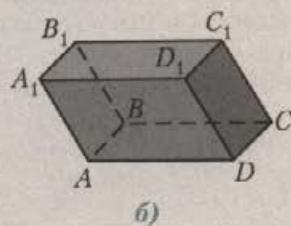
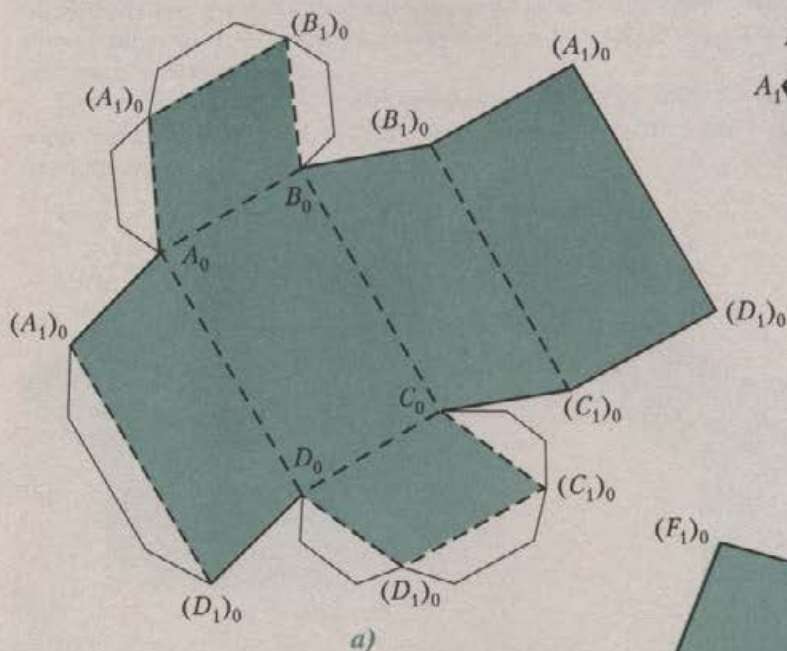


в)



з)

Вырежьте развертки моделей наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. а), в основании которого лежит прямоугольник, и наклонного параллелепипеда $EFKLE_1 F_1 K_1 L_1$ (рис. в), в основании которого лежит квадрат. Склейте модели этих параллелепипедов. Нарисуйте склеенные модели. Сравните свои рисунки с рисунками б) и з).



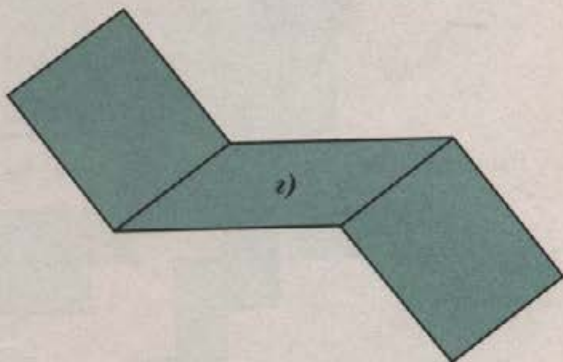
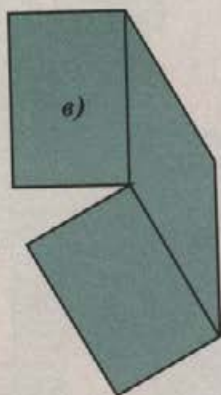
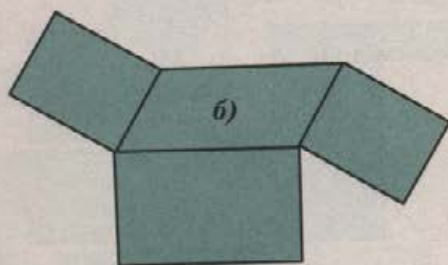
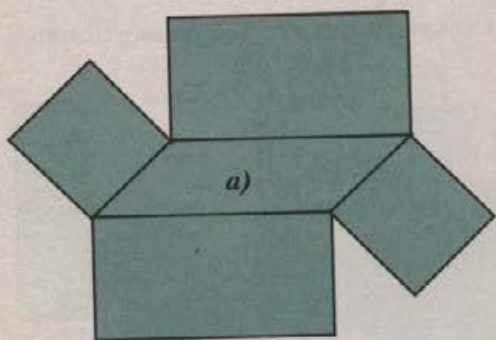
Задание 54

Фигуры *a–г*, изображенные на рисунках, представляют собой недостроенные развертки параллелепипедов.

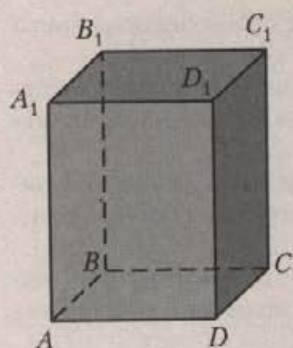
Перерисуйте каждую из фигур на плотную бумагу, увеличив ее размеры в два раза. Дополните полученные фигуры недостающими гранями, чтобы получились развертки параллелепипедов.

Дополните построенные развертки склейками и линиями сгиба, чтобы получились развертки моделей параллелепипедов. Вырежьте эти развертки и склейте модели параллелепипедов.

Пользуясь изготовленными моделями, наблюдайте, что в зависимости от выбора оснований, один и тот же параллелепипед может быть прямым и может быть наклонным.



Задание 55



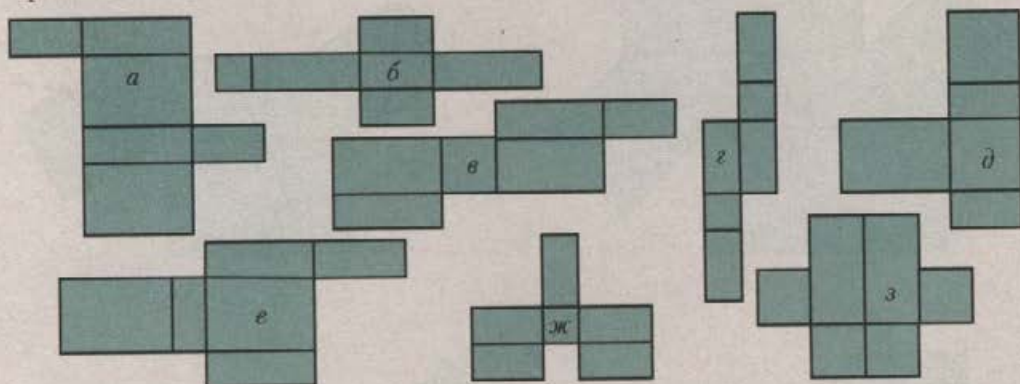
Постройте на плотной бумаге развертки моделей прямоугольных параллелепипедов $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со следующими отношениями ребер $AB : AD : AA_1$:

а) $1 : 3 : 2$; б) $3 : 2 : 4$; в) $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$.

Вырежьте построенные развертки и склейте заданные параллелепипеды.

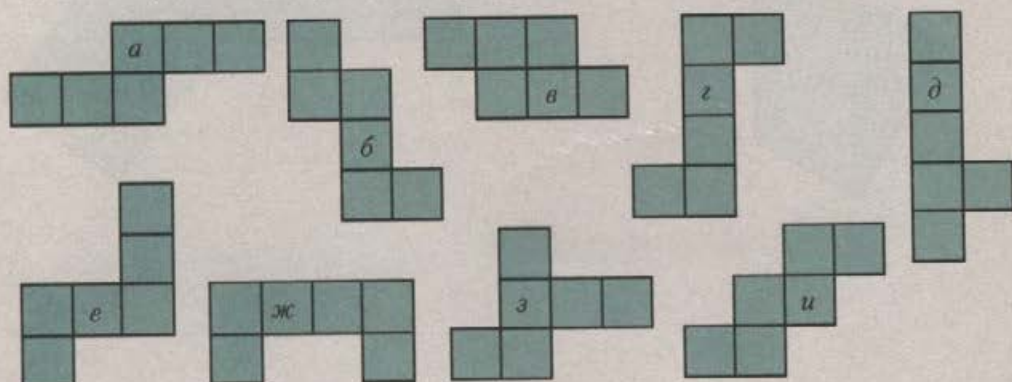
Задание 56

Выясните, какие из построенных фигур не являются развертками прямоугольного параллелепипеда.



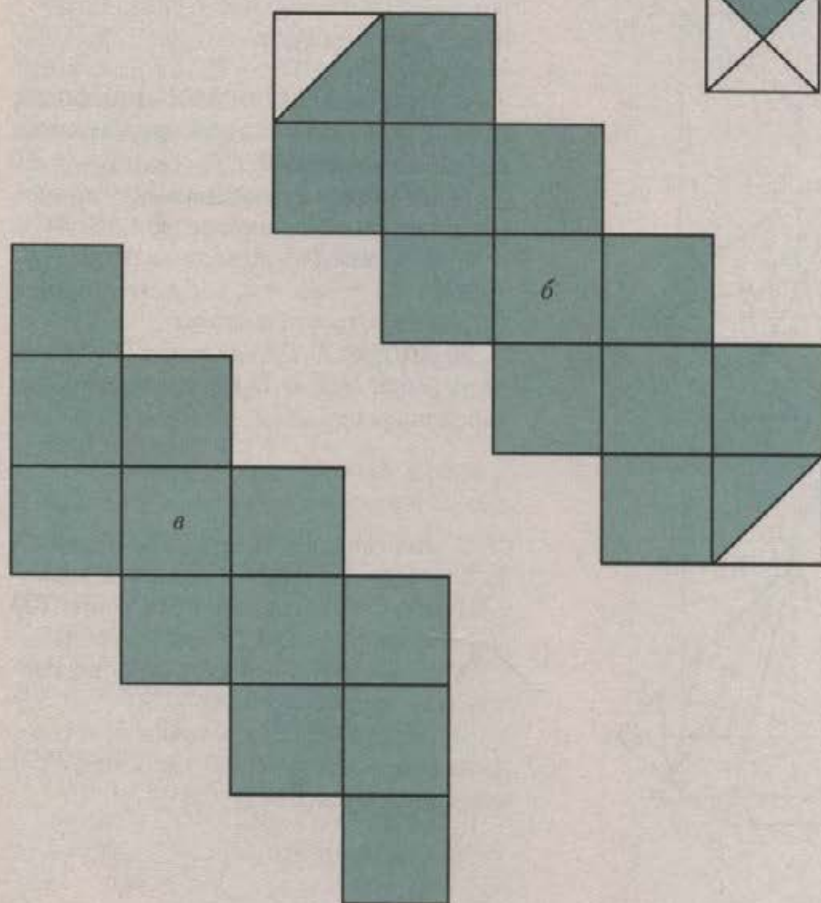
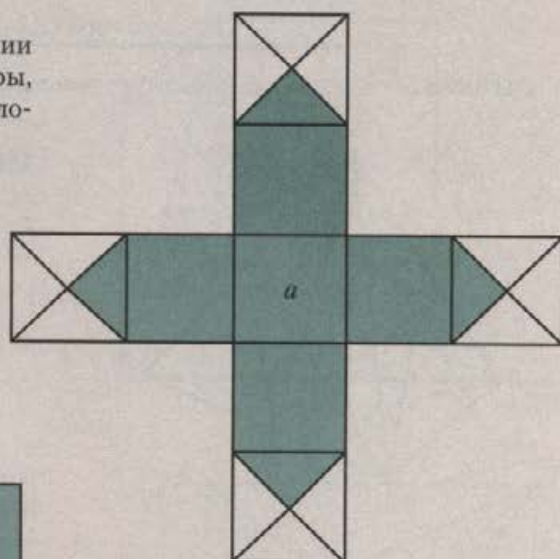
Задание 57

Выясните, какие из закрашенных фигур не являются развертками куба.



На сетке с квадратными ячейками закрашены фигуры *a*, *b* и *в*.

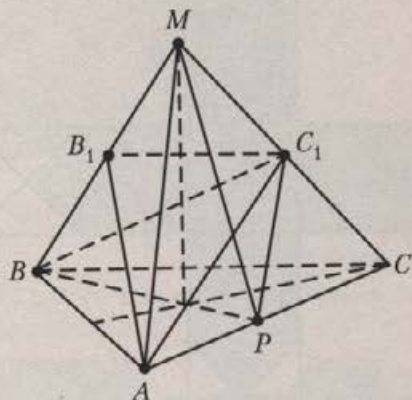
Постройте на каждой из них линии сгиба, согнув по которым эти фигуры, можно полностью (без просветов и наложений) закрыть поверхность куба.



13. Вычисление расстояния между двумя точками

Задание 59

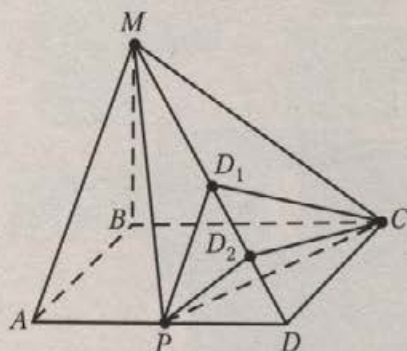
Вычислите стороны заданных треугольников.



1. Ребро правильного тетраэдра $MABC$ равно a . На его ребрах MB , MC и AC взяты соответственно точки B_1 , C_1 и P — середины этих ребер.

Найдите стороны следующих треугольников:

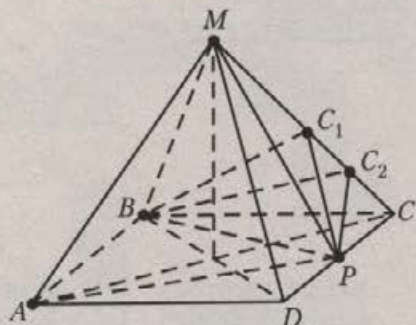
а) MBP ; б) C_1BP ; в) AB_1C_1 .



2. Грани MAB и MBC пирамиды $MABCD$ — прямоугольные треугольники с общим катетом MB .

В основании пирамиды лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : BC = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AD . Считая $AB = MB = a$, найдите стороны следующих треугольников:

а) MCP ; б) D_1CP , где точка D_1 — середина ребра MD ; в) D_2CP , где точка D_2 — середина ребра DD_1 .



3. Диагональным сечением правильной пирамиды $MABCD$ является равнобедренный треугольник. На ребре CD взята точка P — середина этого ребра.

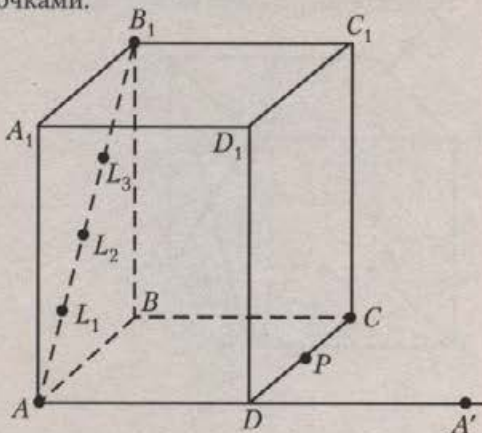
Считая $AB = a$, найдите стороны следующих треугольников:

а) MAP ; б) C_1BP , где точка C_1 — середина ребра MC ; в) C_2BP , где точка C_2 — середина отрезка CC_1 .

Найдите расстояние между заданными точками.

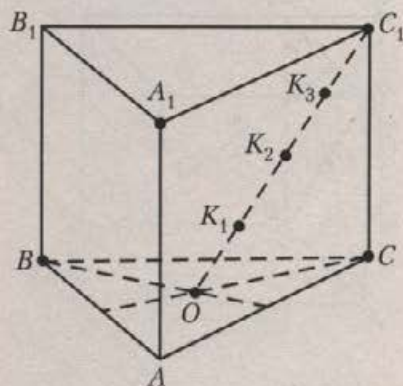
1. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ в два раза больше стороны основания, которая равна a . На отрезке AB_1 взяты точки L_1, L_2 и L_3 — такие, что $AL_1 = L_1L_2 = L_2L_3 = L_3B_1$. Найдите следующие расстояния:

- CL_1, CL_2, CL_3 ;
- PL_1, PL_2, PL_3 , где точка P — середина ребра CD ;
- $A'L_1, A'L_2, A'L_3$, где точка A' симметрична точке A относительно точки D .



2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне основания и равно a . Точка O — центр треугольника ABC . На отрезке OC_1 взяты точки K_1, K_2 и K_3 — такие, что $OK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = K_3C_1$. Найдите следующие расстояния:

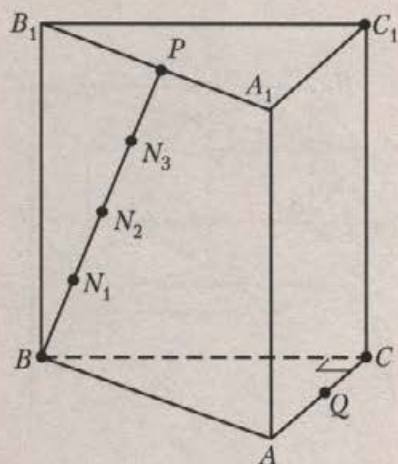
- CK_1, CK_2, CK_3 ;
- BK_1, BK_2, BK_3 ;
- A_1K_1, A_1K_2, A_1K_3 .



3. Боковое ребро прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C , в два раза больше стороны AB основания. Точка P — середина ребра A_1B_1 , а на отрезке BP взяты точки N_1, N_2 и N_3 — такие, что $BN_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = N_3P$.

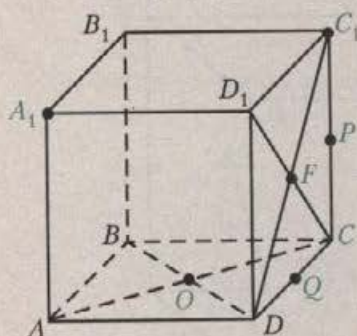
Считая $AB = a$, найдите следующие расстояния:

- CN_1, CN_2, CN_3 ;
- C_1N_1, C_1N_2, C_1N_3 ;
- QN_1, QN_2, QN_3 , где точка Q — середина ребра AC .



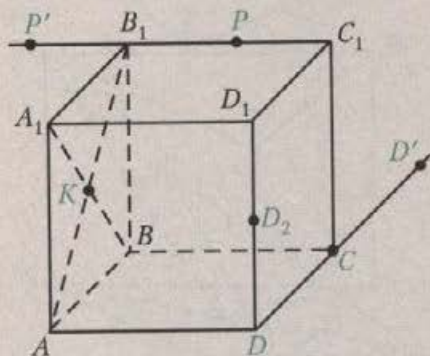
Задание 61

Найдите расстояние между заданными точками.



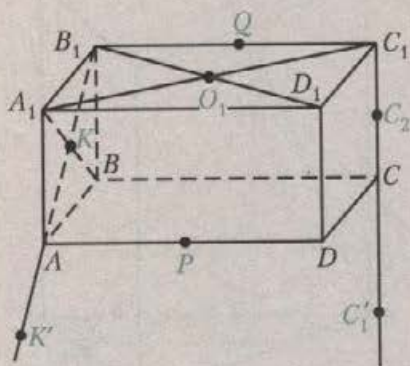
1. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найдите следующие расстояния:

- а) $A_1 C_1$ и $A_1 C$;
- б) $A_1 O$ и $A_1 F$, где точки O и F — центры соответственно граней $ABCD$ и $CDD_1 C_1$;
- в) $A_1 P$ и $A_1 Q$, где точки P и Q — середины соответственно ребер CC_1 и CD .



2. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найдите расстояния от точки K — середины отрезка AB_1 — до следующих точек:

- а) P и D_2 — середин соответственно ребер $B_1 C_1$ и DD_1 ;
- б) D и C ;
- в) D' и P' , симметричных соответственно точке D относительно точки C и точке P относительно точки B_1 .



3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$. Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки P — середины ребра AD — до следующих точек:

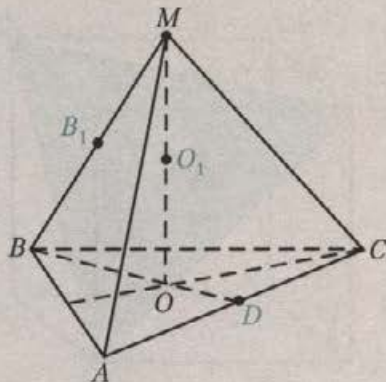
- а) Q и C_2 — середин соответственно ребер $B_1 C_1$ и CC_1 ;
- б) K и O_1 — центров соответственно граней $ABB_1 A_1$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$;
- в) C'_1 , симметричной точке C_1 относительно точки C ; K' , симметричной точке K относительно точки A .

Найдите расстояние между заданными точками.

1. Высота правильной пирамиды $MABC$ равна стороне ее основания. Точка D — середина ребра AC .

Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки D до следующих точек:

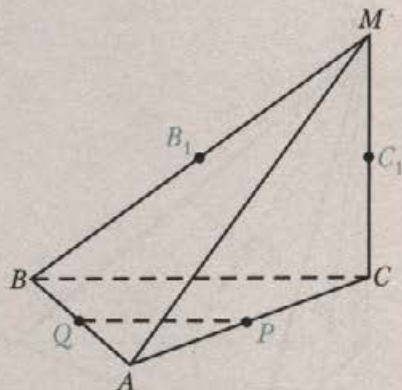
- а) M ; б) O_1 — середины высоты MO ;
в) B_1 — середины ребра MB .



2. В основании пирамиды $MABC$ лежит равносторонний треугольник, а ее боковое ребро MC в два раза больше стороны основания и перпендикулярно ребрам AC и BC .

Считая $AB = a$, найдите следующие расстояния:

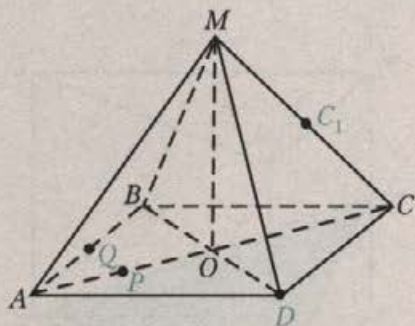
- а) между точками P и B_1 — серединами соответственно ребер AC и MB ; б) между точками Q и C_1 — серединами соответственно ребер AB и MC ; в) от точки B_1 до середины отрезка PQ .



3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$, а ее диагональным сечением является равносторонний треугольник. Точка C_1 — середина ребра MC .

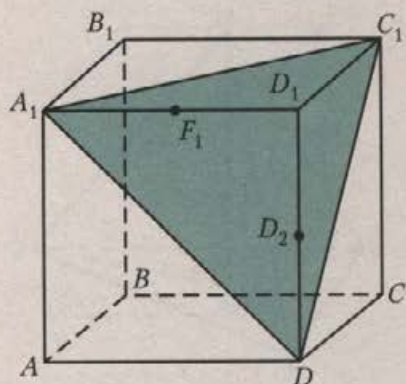
Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки C_1 до следующих точек:

- а) P — середины отрезка AO , точка O которого — центр основания; б) D ; в) Q — середины ребра AB .

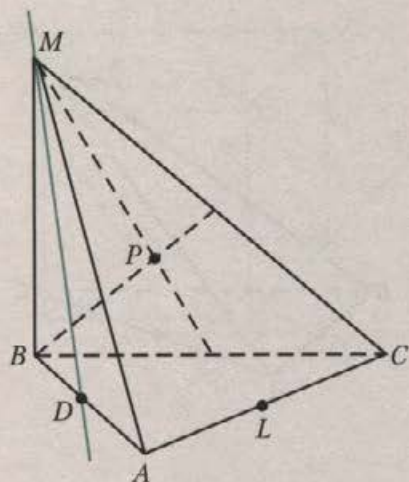


Задание 63

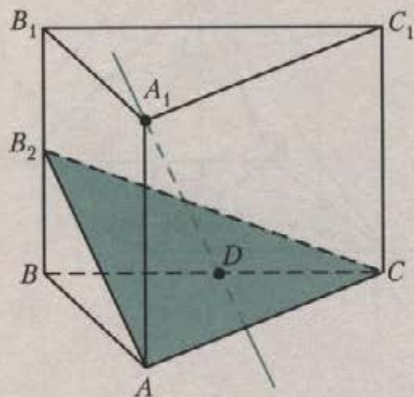
Найдите расстояния между заданными точками.



1. Через вершины A_1 , C_1 и D куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно a , проведена плоскость α . На ребрах DD_1 и $A_1 D_1$ взяты соответственно точки D_2 и F_1 — середины этих ребер. Найдите расстояния от точки пересечения с плоскостью α следующих отрезков: а) BD_1 ; б) BD_2 ; в) CF_1 до концов этих отрезков.



2. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник. Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания. На ребре AB взята точка D — середина его, а в грани MBC взята точка P — центр этой грани. Постройте прямую, проходящую через точку P параллельно прямой MD , и, считая $AC = BC = MB = a$, найдите расстояния от точки пересечения этой прямой с плоскостью основания до следующих точек: а) B и C ; б) D и A ; в) M и L — середины ребра AC .



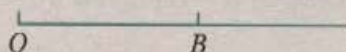
3. На ребрах BC и BB_1 правильной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ взяты соответственно точки D и B_2 — середины этих ребер.

Считая $AB = AA_1 = a$, найдите расстояния до точки пересечения прямой $A_1 D$ с плоскостью α , проходящей через точки B_2 , A и C от следующих точек: а) A_1 и D ; б) B и C ; в) B_1 и C_1 .

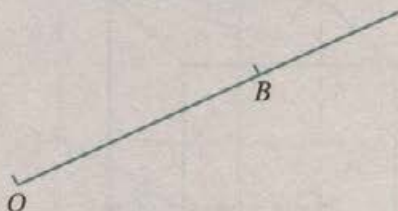
14. Деление отрезка в данном отношении

Задание 64

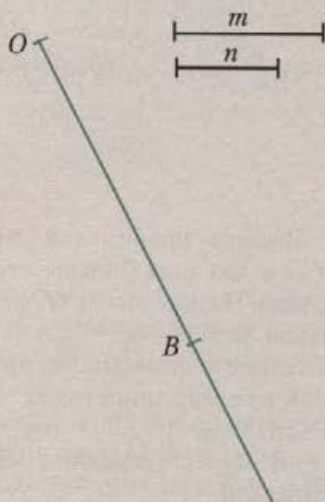
На данном луче OB постройте точку X , такую, что отношение отрезков $OX : OB$ принимает следующие значения:



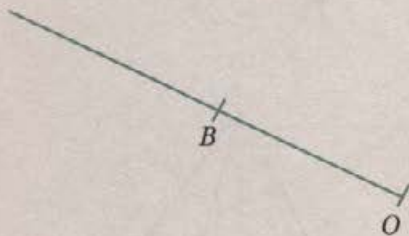
1. а) $5 : 2$
б) $6 : 5$;
в) $2 : 3$.



2. а) $1 : 4$;
б) $2 : 7$;
в) $5 : 3$.



3. а) $m : n$;
б) $(m + n) : (m - n)$;
в) $(2m + n) : (2m - n)$.

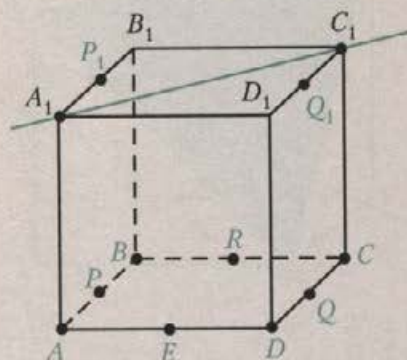


4. а) $3 : \sqrt{2}$;
б) $\sqrt{3} : 5$;
в) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

15. Построение перпендикуляра к прямой

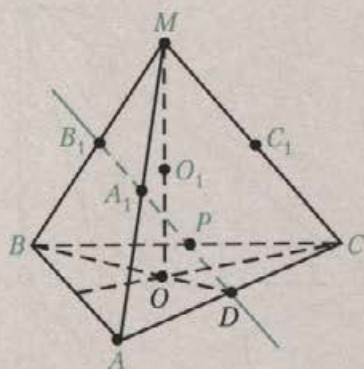
Задание 65

Опустите перпендикуляр из заданной точки на заданную прямую.



1. Опустите перпендикуляры на прямую A_1C_1 из следующих вершин и точек куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$:

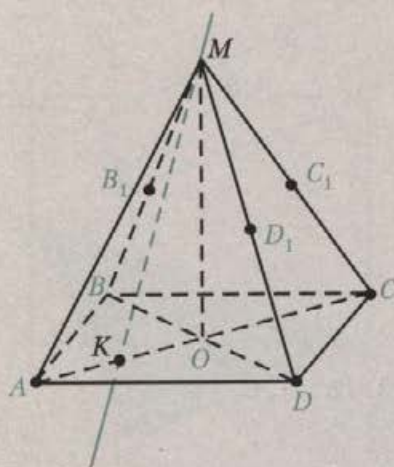
а) D ; б) B ; в) D ; г) E — середины AD ; д) P — середины AB ; е) P_1 — середины A_1B_1 ; ж) Q — середины CD ; з) Q_1 — середины C_1D_1 ; и) R — середины BC .



2. На ребрах MB и AC правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки B_1 и D — середины этих ребер.

Опустите перпендикуляры на прямую B_1D из следующих точек:

а) A ; б) B ; в) M ; г) C ; д) C_1 — середины MC ; е) O_1 — середины высоты MO ; ж) P — середины BC ; з) A_1 — середины MA .



3. Высота правильной пирамиды $MABCD$ в два раза больше стороны ее основания. На диагонали AC взята точка K — такая, что $AK : AC = 1 : 4$.

Опустите перпендикуляры на прямую MK из следующих точек:

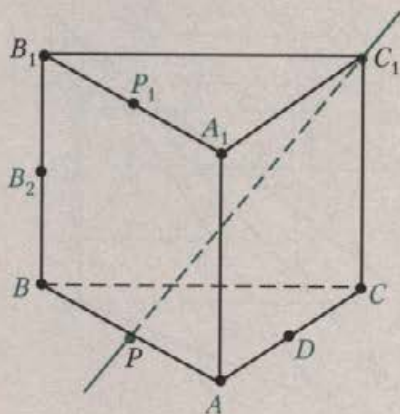
а) C ; б) O ; в) A ; г) C_1 — середины MC ; д) D ; е) B ; ж) D_1 — середины MD ; з) B_1 — середины MB .

Опустите перпендикуляр из заданной точки на заданную прямую.

1. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. Точка P — середина ребра AB .

Опустите перпендикуляры на прямую C_1P из следующих точек:

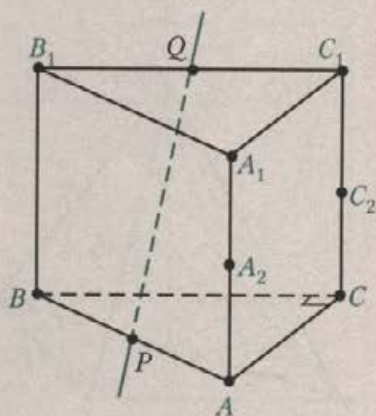
- а) A ; б) B ; в) C ; г) A_1 ; д) B_1 ; е) D — середины AC ; ж) P_1 — середины A_1B_1 ; з) B_2 — середины ребра BB_1 .



2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C . Ее боковое ребро равно стороне AB основания. Точки P и Q — середины соответственно ребер AB и B_1C_1 .

Опустите перпендикуляры на прямую PQ из следующих точек:

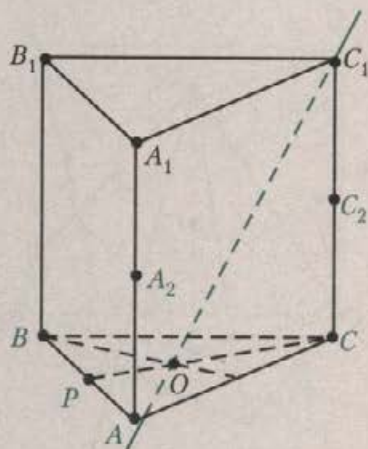
- а) A ; б) B ; в) B_1 ; г) A_1 ; д) C_1 ; е) C ; ж) C_2 — середины CC_1 ; з) A_2 — середины AA_1 .



3. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. Точка O — центр треугольника ABC .

Опустите перпендикуляры на прямую C_1O из следующих точек:

- а) C ; б) C_2 — середины CC_1 ; в) B ; г) A_1 ; д) B_1 ; е) P — середины AB ; ж) A_2 — середины AA_1 .

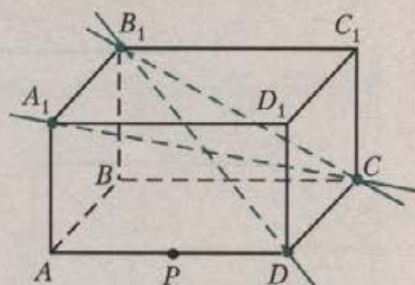


Опустите перпендикуляры из заданной точки на заданную прямую.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отношение ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$.

Опустите перпендикуляры из точки P — середины ребра AD — на следующие прямые:

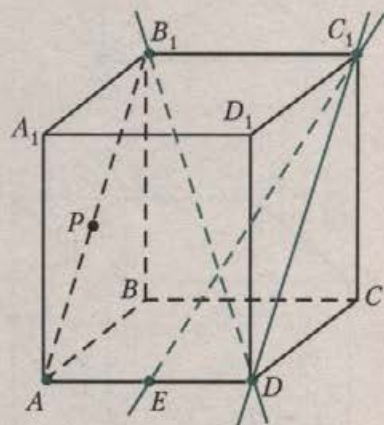
- $A_1 C$;
- $B_1 D$;
- $B_1 C$.



2. В правильной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отношение ребер $AB : AA_1 = 2 : 3$. Точка P — середина отрезка AB_1 .

Опустите перпендикуляры из точки P на следующие прямые:

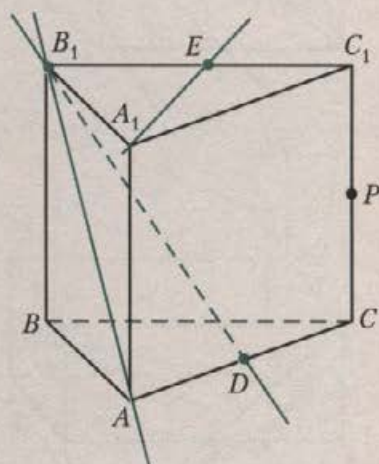
- $C_1 D$;
- $B_1 D$;
- $C_1 E$, точка E которой является серединой ребра AD .



3. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равно стороне ее основания. Точка P — середина ребра CC_1 .

Опустите перпендикуляры из точки P на следующие прямые:

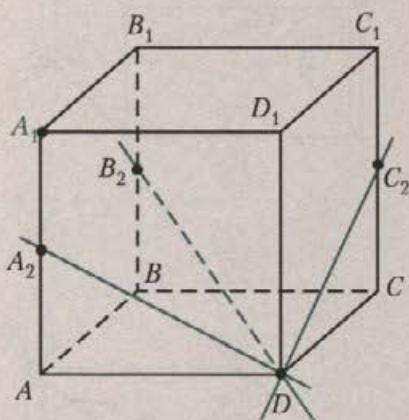
- AB_1 ;
- $B_1 D$, точка D которой является серединой ребра AC ;
- $A_1 E$, точка E которой является серединой ребра $B_1 C_1$.



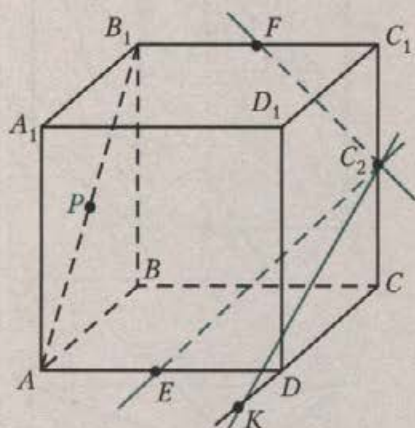
16. Вычисление расстояния от точки до прямой

Задание 69

Найдите расстояние от заданной точки до заданной прямой.

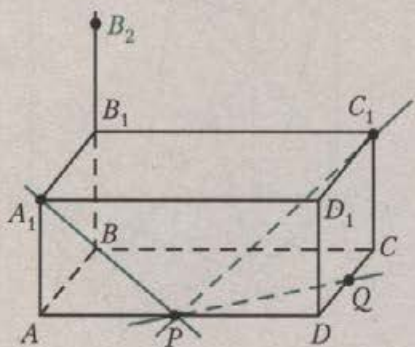


1. На ребрах AA_1 , BB_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки A_2 , B_2 и C_2 — середины этих ребер. Считая ребро куба равным a , найдите расстояния от точки A_1 до следующих прямых: а) DA_2 ; б) DB_2 ; в) DC_2 .



2. На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка C_2 — середина его, а на отрезке AB_1 взята точка P — середина этого отрезка.

Считая ребро куба равным a , найдите расстояния от точки P до следующих прямых: а) C_2E , точка E которой является серединой ребра AD ; б) C_2F , точка F которой является серединой ребра B_1C_1 ; в) C_2K , точка K которой является точкой прямой CD , такой, что точка D лежит между точками C и K , причем $C_2K : CD = 3 : 2$.



3. Отношение ребер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $1 : 2 : 1$. Точки P и Q — середины соответственно ребер AD и CD , а точка B_2 — такая точка прямой BB_1 , что точка B_1 является серединой отрезка BB_2 .

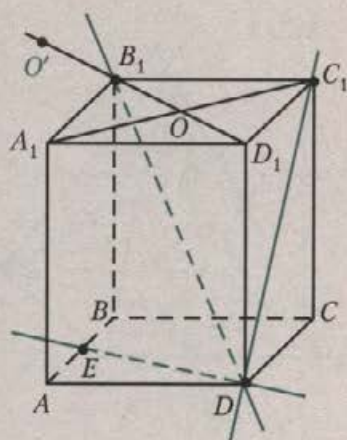
Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки B_2 до следующих прямых: а) A_1P ; б) PQ ; в) C_1P .

Найдите расстояние от заданной точки до заданной прямой.

1. Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ к стороне ее основания равно $3:2$. На прямой $B_1 D_1$ взята точка O — центр верхнего основания призмы и точка O' , симметричная точке O относительно точки B_1 .

Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки O' до следующих прямых:

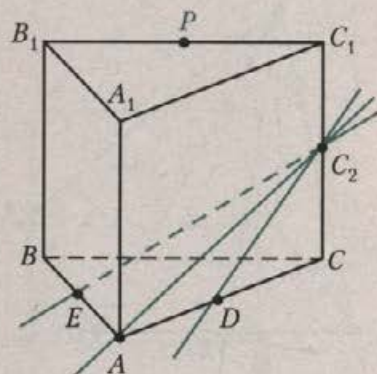
а) DB_1 ; б) DC_1 ; в) DE , точка E которой является серединой ребра AB .



2. Боковые грани призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ — квадраты. Точка P — середина ребра $B_1 C_1$, а точка C_2 — середина ребра CC_1 .

Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки P до следующих прямых:

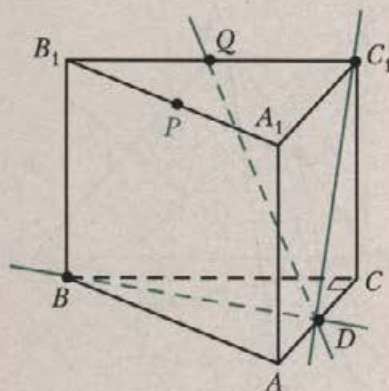
а) $C_2 A$; б) $C_2 D$, точка D которой является серединой ребра AC ; в) $C_2 E$, точка E которой является серединой ребра AB .



3. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C . Ее боковое ребро равно большей стороне основания. Точка P — середина ребра $A_1 B_1$, а точка D — середина ребра AC .

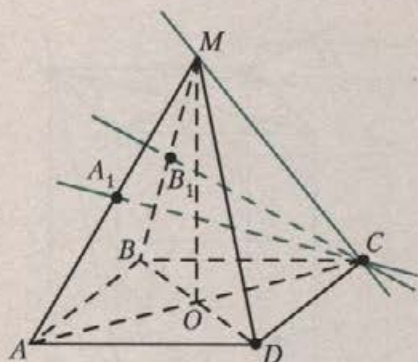
Считая $BC = a$, найдите расстояния от точки P до следующих прямых:

а) BD ; б) $C_1 D$; в) QD , точка Q которой является серединой ребра $B_1 C_1$.



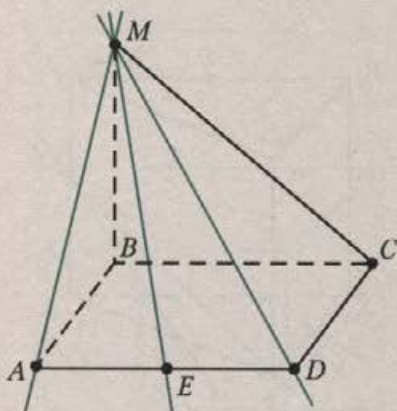
Задание 71

Найдите расстояние от заданной точки до заданной прямой.



1. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна стороне ее основания. Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки D до следующих прямых:

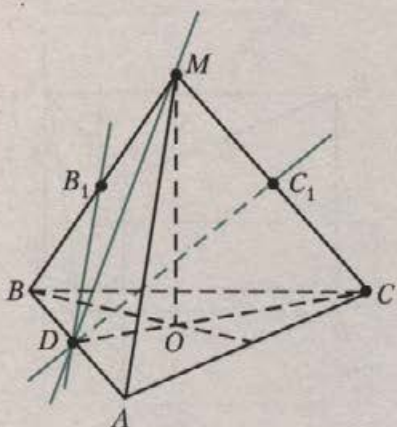
- MC ;
- B_1C , точка B_1 которой является серединой ребра MB ;
- A_1C , точка A_1 которой является серединой ребра MA .



2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно сторонам AB и BC основания и равно AB .

Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки C до следующих прямых:

- MD ;
- MA ;
- ME , точка E которой является серединой ребра AD .



3. Высота правильной пирамиды $MABC$ в два раза больше стороны ее основания. Точка D — середина ребра AB .

Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки C до следующих прямых:

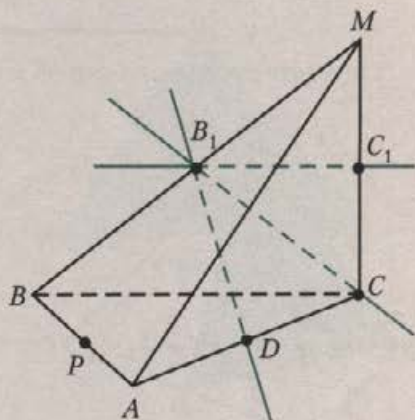
- MD ;
- DC_1 , точка C_1 которой является серединой ребра MC ;
- DB_1 , точка B_1 которой является серединой ребра MB .

Найдите расстояние от заданной точки до заданной прямой.

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит равносторонний треугольник, а ее боковые грани MAC и MBC — равнобедренные треугольники с общим катетом MC . Точка B_1 — середина ребра MB .

Считая $BC = a$, найдите расстояния от точки P — середины ребра AB — до следующих прямых:

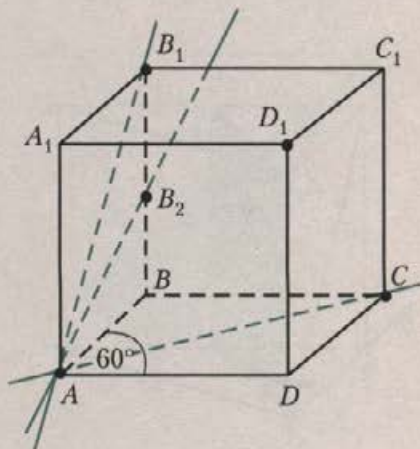
а) B_1C ; б) B_1D , точка D которой является серединой ребра AC ; в) B_1C_1 , точка C_1 которой является серединой ребра MC .



2. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб, у которого $\angle BAD = 60^\circ$, а ее боковое ребро равно стороне основания.

Считая $AB = a$, найдите расстояния от точки D_1 до следующих прямых:

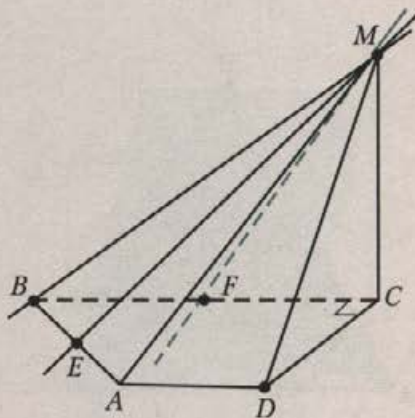
а) AC ; б) AB_1 ; в) AB_2 , точка B_2 которой является серединой ребра BB_1 .



3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольная трапеция, основание AD которой равно боковой стороне CD и в два раза меньше основания BC . Боковое ребро MC перпендикулярно сторонам BC и CD основания и равно стороне AD .

Считая $AD = a$, найдите расстояния от точки D до следующих прямых:

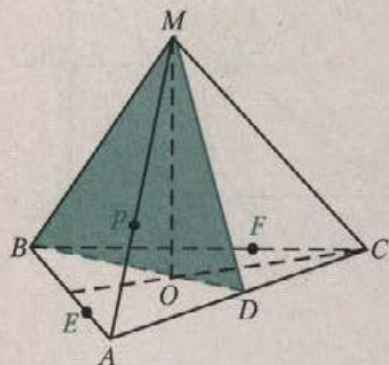
а) MF , точка F которой является серединой ребра BC ; б) MB ; в) ME , точка E которой является серединой ребра AB .



17. Построение перпендикуляра к плоскости

Задание 73

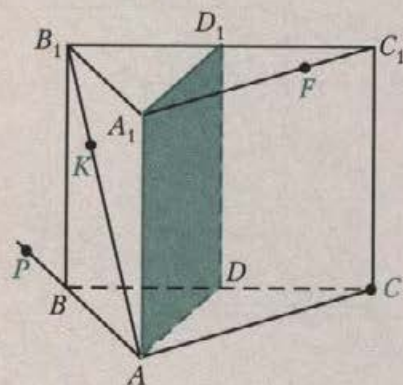
Опустите перпендикуляр из заданной точки на заданную плоскость.



1. На ребре AC правильной пирамиды $MABC$ взята точка D — середина этого ребра.

Опустите перпендикуляры на плоскость MDB из следующих точек:

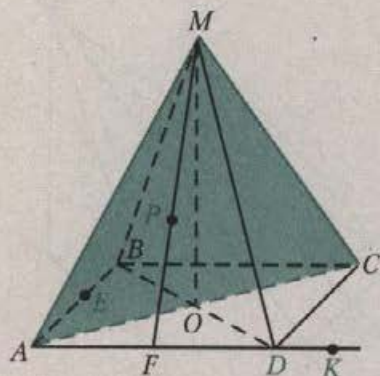
- C ;
- P , взятой на ребре MA ;
- E , взятой на ребре AB ;
- F , взятой на ребре BC .



2. На ребре BC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка D — середина этого ребра.

Опустите перпендикуляры на плоскость A_1AD из следующих точек:

- C ;
- F , взятой на ребре A_1C ;
- K , взятой на отрезке AB_1 ;
- P , взятой на прямой AB .



3. Опустите перпендикуляры на диагональную плоскость MAC правильной пирамиды $MABCD$ из следующих точек:

- D ;
- E , взятой на ребре AB ;
- P , взятой на апофеме MF ;
- K , взятой на прямой AD .

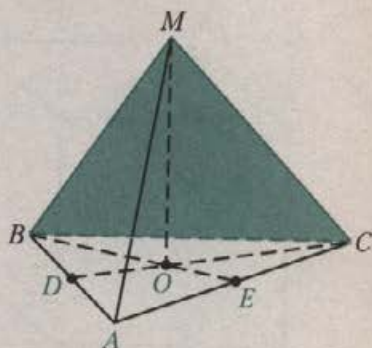
Задание 74

Опустите перпендикуляр из заданной точки на заданную плоскость.

1. Отношение высоты MO правильной пирамиды $MAVC$ к стороне ее основания равно $\sqrt{3} : 6$.

Опустите перпендикуляры на плоскость MBC из следующих точек:

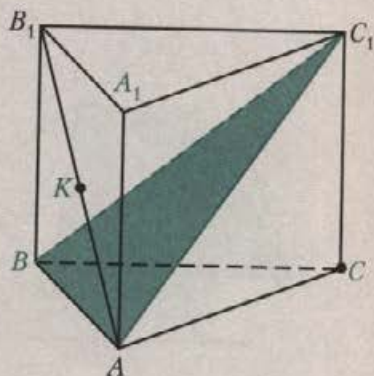
- а) O — центра грани ABC ;
- б) A ;
- в) D — середины ребра AB ;
- г) E — середины ребра AC .



2. Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ к стороне ее основания равно $\sqrt{3} : 2$.

Опустите перпендикуляры на плоскость ABC_1 из следующих точек:

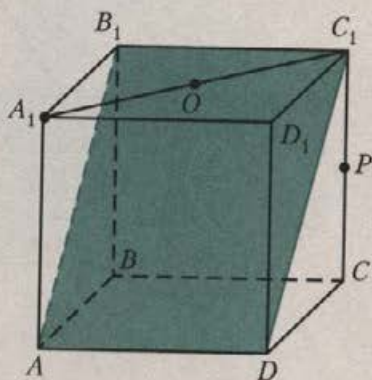
- а) C ;
- б) K — середины отрезка AB_1 ;
- в) A_1 ;
- г) B .



3. Отношение ребер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $1 : 2 : 2$.

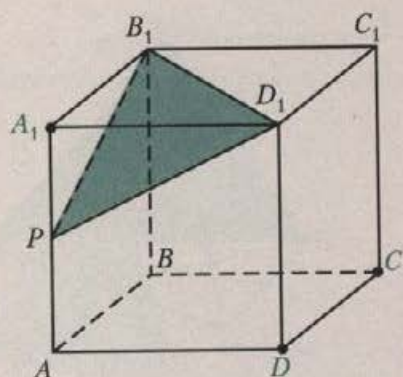
Опустите перпендикуляры на диагональную плоскость AB_1C_1 из следующих точек:

- а) A_1 ;
- б) B ;
- в) P — середины ребра CC_1 ;
- г) O — середины диагонали A_1C_1 .



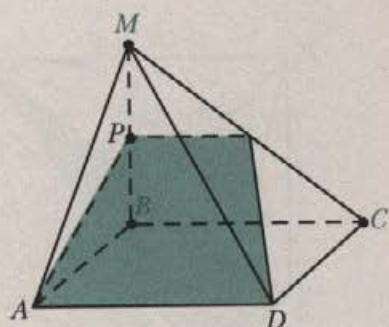
Задание 75

Опустите перпендикуляр из заданной точки на заданную плоскость.



1. Опустите перпендикуляры на плоскость B_1D_1P , точка P которой является серединой ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, из следующих точек:

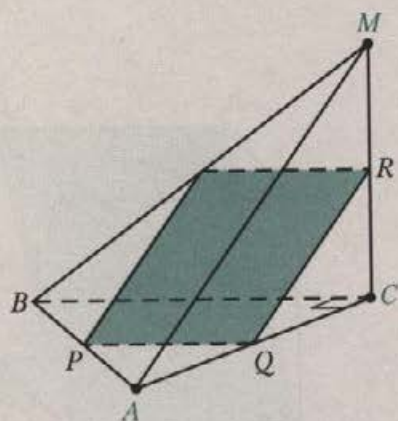
а) A_1 ; б) C ; в) D .



2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

Опустите перпендикуляры на плоскость PAD , точка P которой является серединой ребра MB , из следующих точек:

а) B ; б) M ; в) C .



3. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник, а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и $AC = BC = MC$.

Опустите перпендикуляры на плоскость PQR , точки P, Q и R которой являются серединами соответственно ребер AB, AC и MC , из следующих точек:

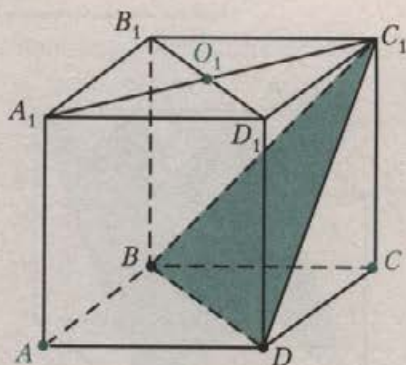
а) C ; б) M ; в) A .

Опустите перпендикуляр из заданной точки на заданную плоскость.

1. Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ к стороне ее основания равно $3 : 2$.

Опустите перпендикуляры на плоскость $BC_1 D$ из следующих точек:

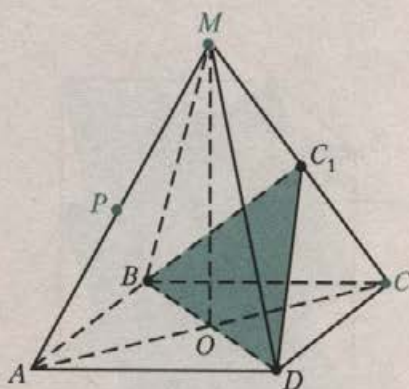
- C ;
- A ;
- O_1 — центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$.



2. Отношение высоты правильной пирамиды $MABCD$ к стороне ее основания равно $\sqrt{2} : 1$.

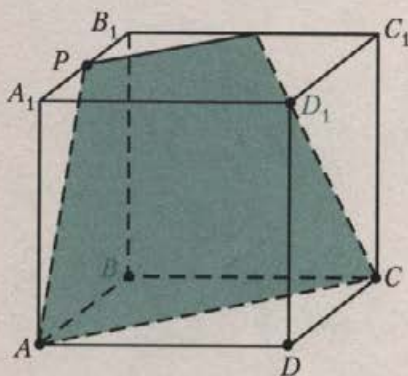
Опустите перпендикуляры на плоскость $BC_1 D$, точка C_1 которой является серединой ребра MC , из следующих точек:

- M ;
- C ;
- P — середины ребра MA .



3. Точка P — середина ребра $A_1 B_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Опустите перпендикуляры на плоскость $CA P$ из следующих точек:

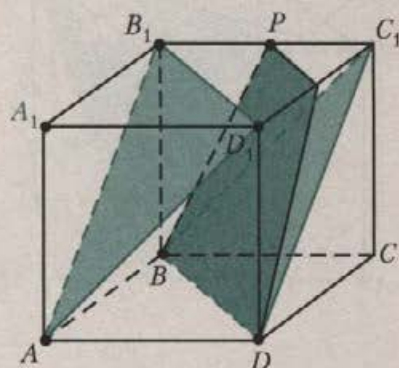
- D_1 ;
- B ;
- D .



18. Вычисление расстояния от точки до плоскости

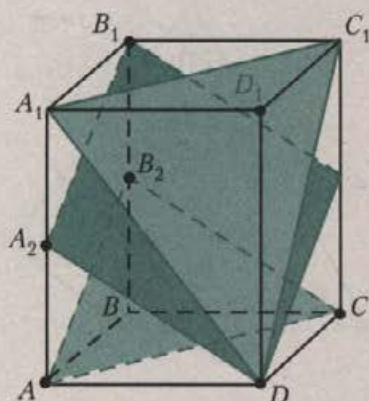
Задание 77

Найдите расстояние от заданной точки до заданной плоскости.



1. Считая ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равным a , найдите расстояния от его вершины A_1 до следующих плоскостей:

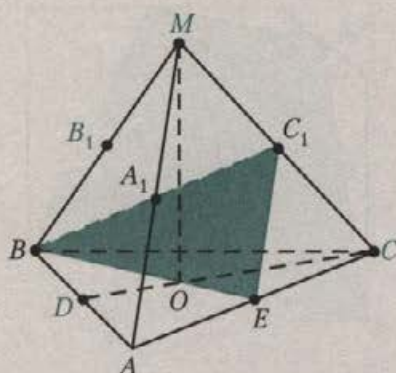
- $AB_1 D_1$;
- DBP , точка P которой является серединой ребра $B_1 C_1$;
- $BC_1 D$.



2. Боковое ребро правильной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ в два раза больше стороны ее основания.

Считая $AB = a$, найдите расстояния от вершины D_1 до следующих плоскостей:

- $A_1 C_1 D$;
- $AB_2 C$, точка B_2 которой является серединой ребра BB_1 ;
- $B_1 A_2 D$, точка A_2 которой является серединой ребра AA_1 .



3. На ребрах AC и MC правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки E и C_1 — середины этих ребер.

Считая ребро тетраэдра равным a , найдите расстояния до плоскости $BC_1 E$ от следующих точек:

- A_1 — середины ребра MA ;
- M ;
- D — середины ребра AB ;
- B_1 — середины ребра MB ;

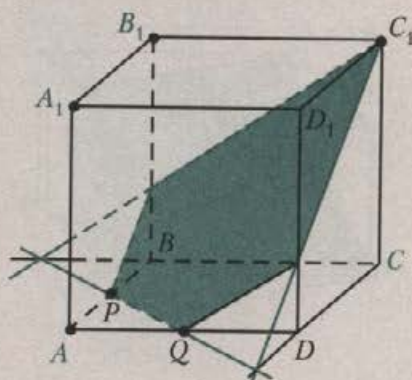
Задание 78

Найдите расстояние от заданной точки до заданной плоскости.

1. На ребрах AB и AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер.

Считая ребро куба равным a , найдите расстояния до плоскости α , проходящей через точки C_1, P и Q от следующих точек:

а) A_1 ; б) A ; в) B_1 ; г) C .

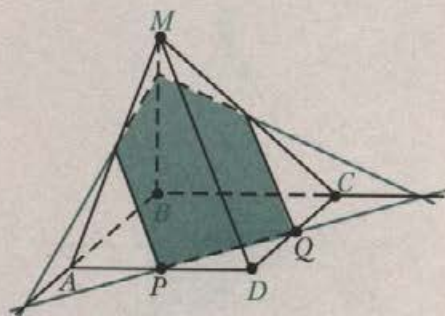


2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

Точки P и Q — середины соответственно ребер AD и CD .

Считая $AB = a$, найдите расстояния до плоскости α , проходящей через точки P и Q параллельно прямой MD , от следующих точек:

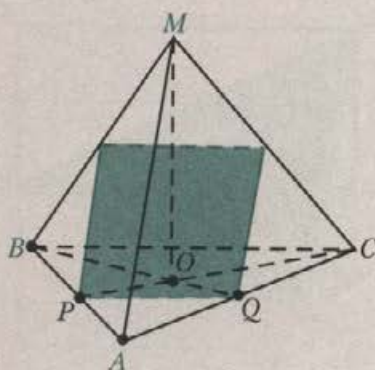
а) B ; б) D ; в) M ; г) C .



3. Боковое ребро правильной пирамиды $MABC$ равно медиане ее основания. Точки P и Q — середины соответственно ребер AB и AC .

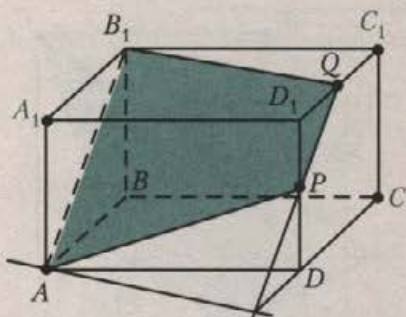
Считая $AB = a$, найдите расстояния до плоскости α , проходящей через точки P и Q параллельно прямой MA , от следующих точек:

а) A ; б) O — центра основания; в) M ; г) B .



Задание 79

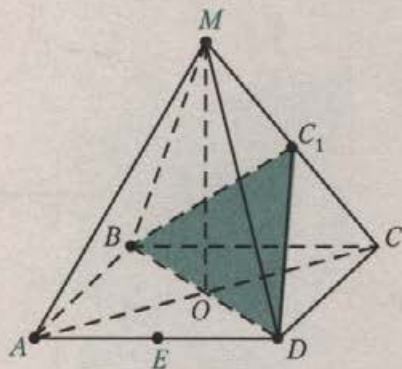
Найдите расстояние от заданной точки до заданной плоскости.



1. На ребрах DD_1 и C_1D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$, взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер.

Считая $AB = a$, найдите расстояния до плоскости α , проходящей через точки A , P и Q от следующих точек:

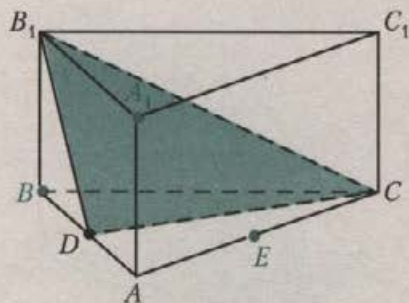
а) C ; б) A_1 ; в) C_1 .



2. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна диагонали ее основания. Точка C_1 — середина ребра MC .

Считая сторону основания пирамиды равной a , найдите расстояния до плоскости BC_1D от следующих точек:

а) M ; б) A ; в) E — середина ребра AD .



3. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ в два раза меньше стороны основания. Точка D — середина ребра AB .

Считая $AB = a$, найдите расстояния до плоскости B_1CD от следующих точек: а) B ; б) A_1 ; в) E — середины ребра AC .

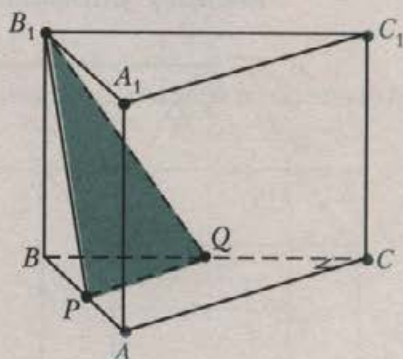
Задание 80

Найдите расстояние от заданной точки до заданной плоскости.

1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C , а ее боковое ребро равно стороне BC основания. Точки P и Q — середины соответственно ребер AB и BC .

Считая $BC = a$, найдите расстояния до плоскости B_1PQ от следующих точек:

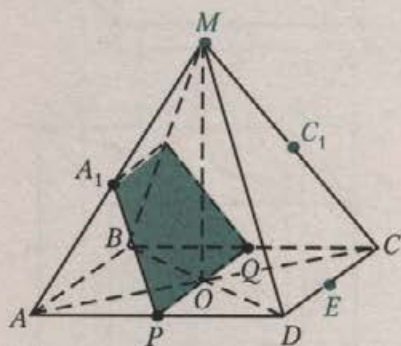
а) C ; б) C_1 ; в) A .



2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Диагонали основания пересекаются в точке O . Отрезок MO является высотой пирамиды и $MO = AD$. Точки A_1, P и Q — середины соответственно ребер MA, AD и BC .

Считая $AB = a$, найдите расстояния до плоскости α , проходящей через точки A_1, P и Q от следующих точек:

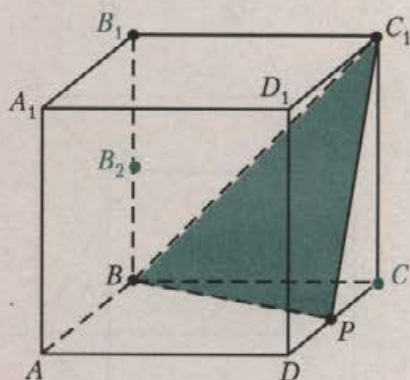
а) M ; б) E — середины ребра CD ; в) C_1 — середины ребра MC .



3. Точка P — середина ребра CD куба $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Считая ребро куба равным a , найдите расстояния до плоскости C_1BP от следующих точек:

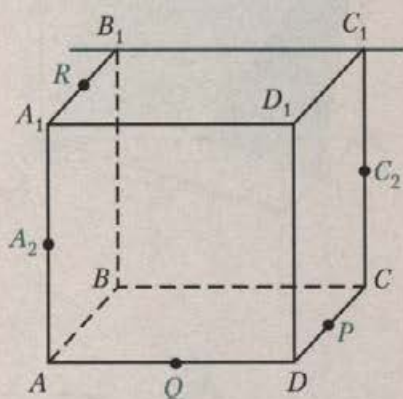
а) B_1 ; б) C ; в) B_2 — середины ребра BB_1 .



19. Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

Задание 81

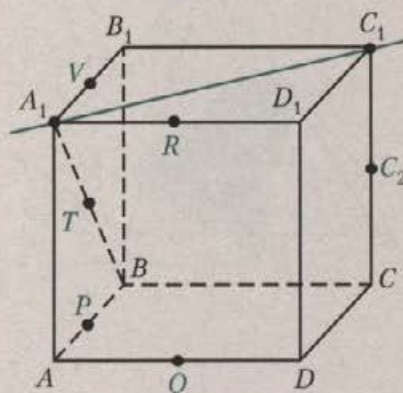
Найдите расстояние между заданными скрещивающимися прямыми.



1. На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка C_2 — середина этого ребра, а на ребрах CD , AD , $A_1 B_1$ и AA_1 взяты соответственно точки P , Q , R и A_2 — середины этих ребер.

Считая ребро куба равным a , найдите расстояния между прямой $B_1 C_1$ и следующими прямыми:

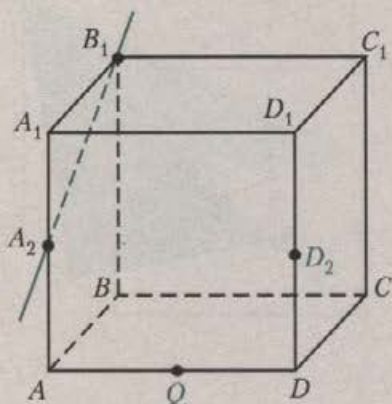
- а) $C_2 A_2$; б) $C_2 P$; в) $C_2 Q$; г) $C_2 R$;
 д) $C_2 A$; е) $C_2 D_1$.



2. На ребрах AD , AB , CC_1 , $A_1 D_1$ и $A_1 B_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки Q , P , C_2 , R и V — середины этих ребер.

Считая ребро куба равным a , найдите расстояния между прямой $A_1 C_1$ и следующими прямыми:

- а) CQ ; б) DP ; в) DC_2 ; г) DR ; д) DV ;
 е) QT , точка T которой — это середина отрезка $A_1 B$.



3. На ребрах AA_1 , DD_1 и AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки A_2 , D_2 и Q — середины этих ребер.

Считая ребро куба равным a , найдите расстояния между прямой $B_1 A_2$ и следующими прямыми:

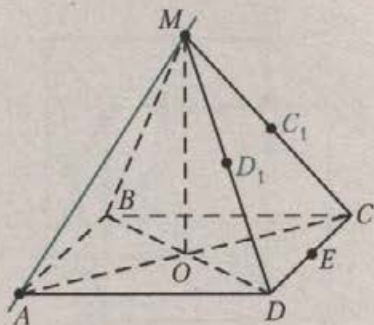
- а) CD ; б) CD_1 ; в) AC ; г) BD ;
 д) $D_2 Q$; е) $A_1 D$.

Найдите расстояние между заданными скрещивающимися прямыми.

1. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна диагонали ее основания. На ребрах MC , MD и CD взяты соответственно точки C_1 , D_1 и E — середины этих ребер.

Считая $AB = a$, найдите расстояния между прямой MA и следующими прямыми:

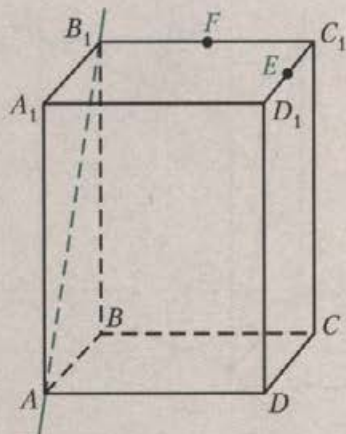
- а) CD ; б) C_1D_1 ; в) BD ; г) DC_1 ; д) BC_1 ; е) C_1E .



2. Боковое ребро правильной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ в три раза больше стороны ее основания. На ребрах $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$ взяты соответственно точки F и E — середины этих ребер.

Считая $AB = a$, найдите расстояния между прямой AB_1 и следующими прямыми:

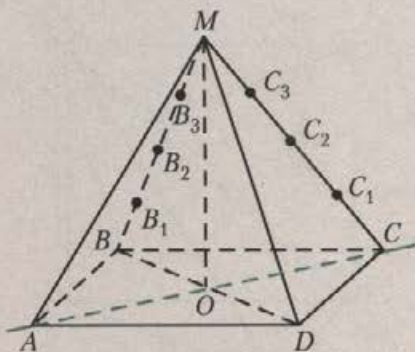
- а) $C_1 D_1$; б) FE ; в) BD ; г) $A_1 D$; д) BC_1 ; е) $A_1 C$.



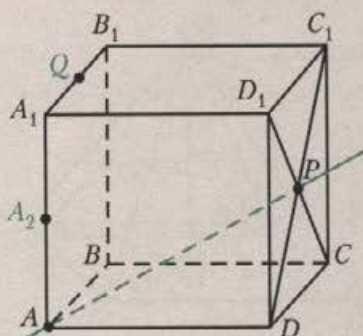
3. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна стороне ее основания. На ребре MC взяты точки C_1 , C_2 и C_3 , такие, что $CC_1 = C_1 C_2 = C_2 C_3 = C_3 M$, а на ребре MB взяты точки B_1 , B_2 и B_3 такие, что $BB_1 = B_1 B_2 = B_2 B_3 = B_3 M$.

Считая $AB = a$, найдите расстояния между прямой AC и следующими прямыми:

- а) DC_1 ; б) DC_2 ; в) DC_3 ; г) DB_1 ; д) DB_2 ; е) DB_3 .



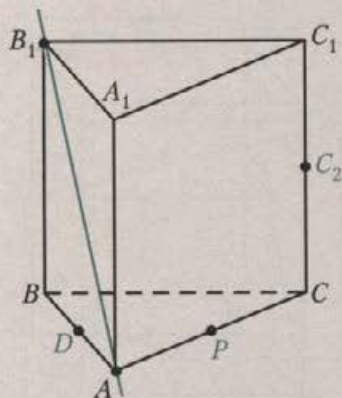
Найдите расстояние между заданными скрещивающимися прямыми.



1. Точка P — центр грани CDD_1C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Считая ребро куба равным a , найдите расстояния между прямой AP и следующими прямыми:

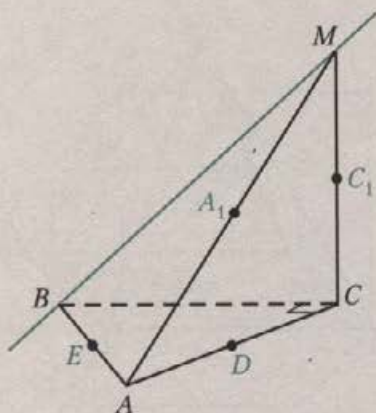
- а) $A_1 B_1$; б) CD ; в) $C_1 D_1$; г) CC_1 ;
 д) $A_2 Q$ точки A_2 и Q которой — это середины соответственно ребер AA_1 и $A_1 B_1$;
 е) $A_1 B$; ж) BC_1 .



2. Боковые грани призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ — квадраты.

Считая $AB = a$, найдите расстояния между прямой AB_1 и следующими прямыми:

- а) CC_1 ; б) CD , точка D которой — это середина ребра AB ; в) BC ; г) $C_2 P$, точки C_2 и P которой — это середины соответственно ребер CC_1 и AC ; д) $A_2 C$, точка A_2 которой — это середина ребра AA_1 ; е) BC_1 .



3. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник с прямым углом при вершине C . Ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания, а отношение ребер $AC : BC : MC$ равно $1 : 1 : \sqrt{2}$.

На ребрах MA , MC , AC и AB взяты соответственно точки A_1 , C_1 , D и E — середины этих ребер.

Считая $BC = a$, найдите расстояния между прямой MB и следующими прямыми:

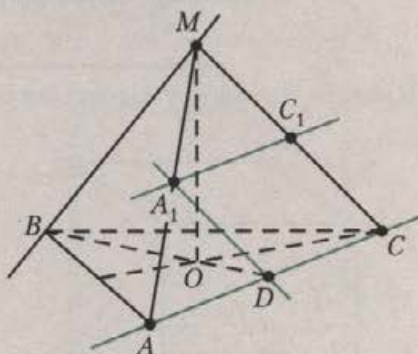
- а) DE ; б) $A_1 D$; в) AC ; г) $A_1 C_1$;
 д) $C_1 D$; е) $C_1 E$.

Найдите расстояние между заданными скрещивающимися прямыми.

1. Ребро правильного тетраэдра $MABC$ равно a . Точка A_1 — середина ребра MA .

Найдите расстояния между прямой MB и следующими прямыми:

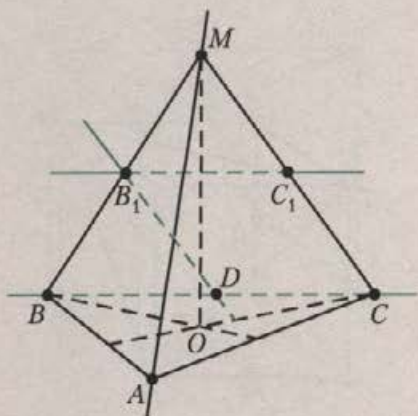
- AC ;
- A_1D , точка D которой — середина ребра AC ;
- A_1C_1 , точка C_1 которой — середина ребра MC .



2. Высота правильной пирамиды $MABC$ в два раза больше стороны ее основания. Точка B_1 — середина ребра MB .

Считая $AB = a$, найдите расстояния между прямой MA и следующими прямыми:

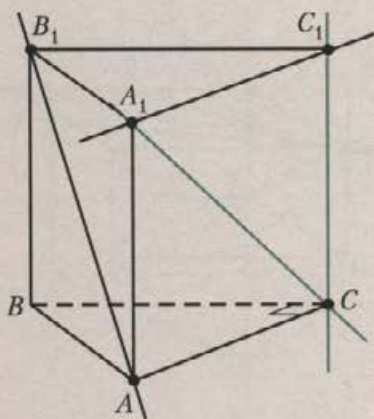
- BC ;
- B_1C_1 , точка C_1 которой — середина ребра MC ;
- B_1D , точка D которой — середина ребра BC .



3. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C , а ее боковое ребро равно BC .

Считая $BC = a$, найдите расстояния между прямой AB_1 и следующими прямыми:

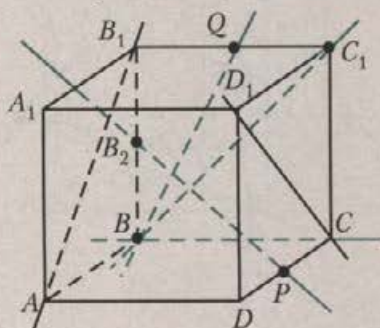
- CC_1 ;
- A_1C_1 ;
- A_1C .



20. Вычисление угла между скрещивающимися прямыми

Задание 85

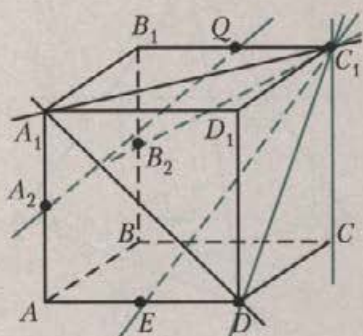
Найдите угол между заданными скрещивающимися прямыми.



1. Точки P и B_2 — середины соответственно ребер CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите углы, которые образует прямая PB_2 со следующими прямыми:

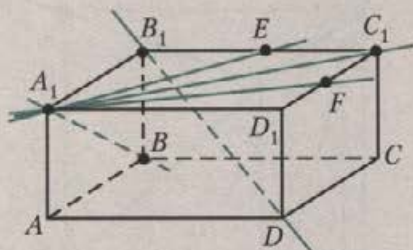
а) BC ; б) CC_1 ; в) BC_1 ; г) BQ , точка Q которой — середина ребра $B_1 C_1$; д) AB_1 ; е) $D_1 C$.



2. Точки A_2 и Q — середины соответственно ребер AA_1 и $B_1 C_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите углы, которые образует прямая $A_2 Q$ со следующими прямыми:

а) $C_1 C$; б) $C_1 D$; в) $C_1 E$, точка E которой — середина ребра AD ; г) $C_1 B_2$, точка B_2 которой — середина ребра BB_1 ; д) $A_1 C_1$; е) $A_1 D$.



3. Отношение ребер прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 1$.

Найдите углы, которые образует прямая $B_1 D$ со следующими прямыми:

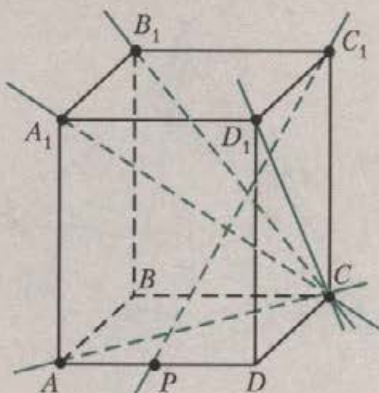
а) $A_1 C_1$; б) AB ; в) $A_1 E$, точка E которой — середина ребра $B_1 C_1$; г) $A_1 F$, точка F которой — середина ребра $C_1 D_1$.

Найдите угол между заданными скрещивающимися прямыми.

1. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ в два раза больше стороны ее основания. Точка P — середина ребра AD .

Найдите углы, которые образует прямая C_1P со следующими прямыми:

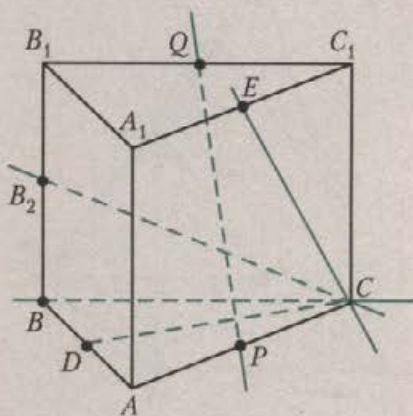
а) B_1C ; б) AC ; в) CD_1 ; г) A_1C .



2. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. Точки P и Q — середины соответственно ребер AC и B_1C_1 .

Найдите углы, которые образует прямая PQ со следующими прямыми:

а) CD , точка D которой — середина ребра AB ; б) BC ; в) B_2C , точка B_2 которой — середина ребра BB_1 ; г) CE , точка E которой — середина ребра A_1C_1 .

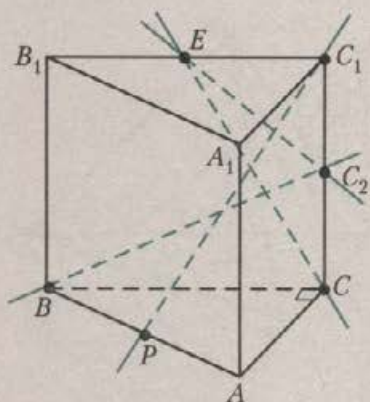


3. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C , а ее боковое ребро равно стороне BC .

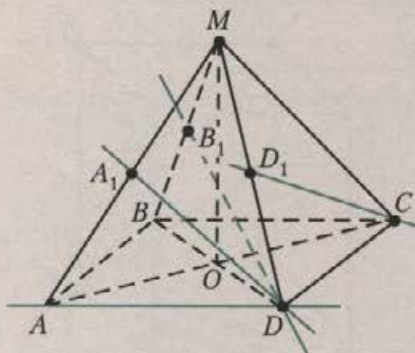
Точка P — середина ребра AB , а точки E и C_2 — середины соответственно ребер B_1C_1 и CC_1 .

Найдите углы, которые образует прямая C_1P со следующими прямыми:

а) BC ; б) CE ; в) C_2E ; г) C_2B .



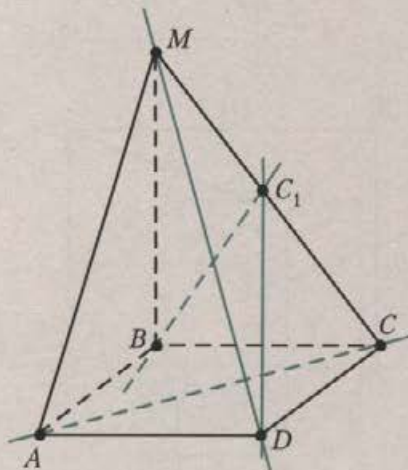
Найдите угол между заданными скрещивающимися прямыми.



1. Диагональным сечением правильной пирамиды $MABCD$ является равносторонний треугольник. Точка D_1 — середина ребра MD .

Найдите углы, которые образует прямая CD_1 со следующими прямыми:

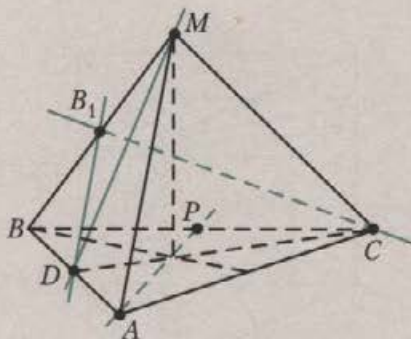
а) AD ; б) DB_1 , точка B_1 которой — середина ребра MB ; в) DA_1 , точка A_1 которой — середина ребра MA .



2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и в два раза больше стороны основания. Точка C_1 — середина ребра MC .

Найдите углы, которые образует прямая AC со следующими прямыми:

а) MD ; б) BC_1 ; в) DC_1 .



3. Точка P — середина ребра BC правильного тетраэдра $MABC$, а точки D и B_1 — середины соответственно ребер AB и MB .

Найдите углы, которые образует прямая AP со следующими прямыми:

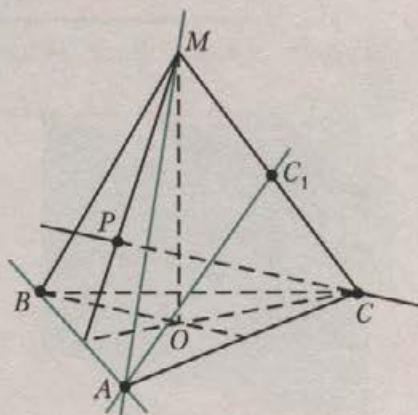
а) DB_1 ; б) MD ; в) CB_1 .

Найдите угол между заданными скрещивающимися прямыми.

1. Точка P — центр грани $МAB$ правильного тетраэдра $МABC$.

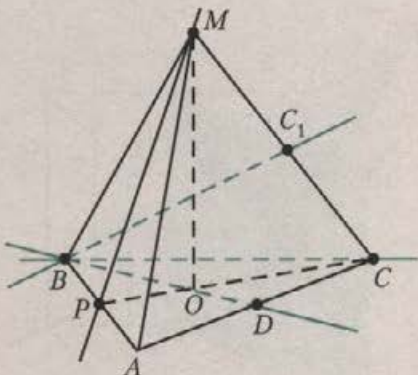
Найдите углы, которые образует прямая CP со следующими прямыми:

а) AB ; б) MA ; в) AC_1 , точка C_1 которой — середина ребра MC .



2. Высота правильной пирамиды $МABC$ равна стороне ее основания. Точка P — середина ребра AB . Найдите углы, которые образует прямая MP со следующими прямыми:

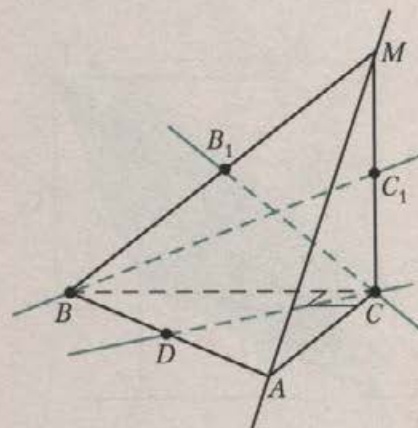
а) BC ; б) BD , точка D которой — середина ребра AC ; в) BC_1 , точка C_1 которой — середина ребра MC .



3. В основании пирамиды $МABC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C , а ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и равно стороне BC .

Найдите углы, которые образует прямая MA со следующими прямыми:

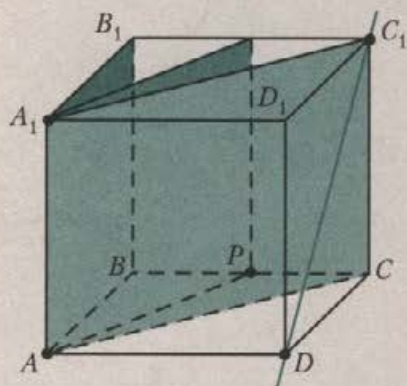
а) BC_1 , точка C_1 которой — середина ребра MC ; б) CD , точка D которой — середина ребра AB ; в) CB_1 , точка B_1 которой — середина ребра MB .



21. Вычисление угла между прямой и плоскостью

Задание 89

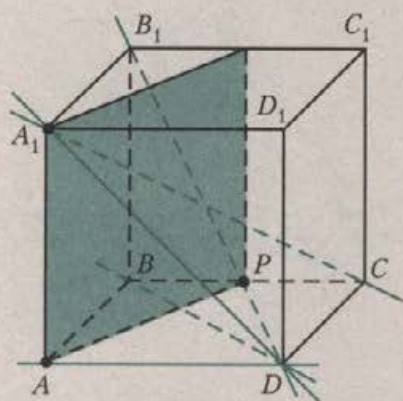
Найдите угол между заданной прямой и заданной плоскостью.



1. Через вершины D и C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена прямая.

Найдите углы между этой прямой и следующими плоскостями:

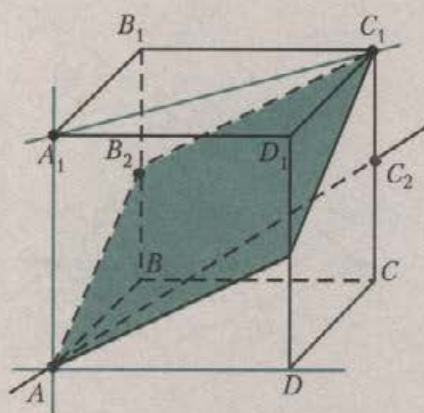
а) ABB_1 ; б) ACC_1 ; в) A_1AP , точка P которой — середина ребра BC .



2. Точка P — середина ребра BC куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите углы между плоскостью A_1AP и следующими прямыми:

а) AD ; б) BD ; в) A_1D ; г) B_1D ; д) A_1C .



3. Точка B_2 — середина ребра BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите углы между плоскостью AB_2C_1 и следующими прямыми:

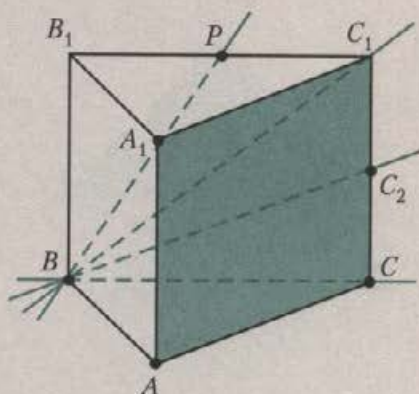
а) AA_1 ; б) A_1C_1 ; в) AC_2 , точка C_2 которой — середина ребра CC_1 ; г) AD .

Найдите угол между заданной прямой и заданной плоскостью.

1. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне ее основания.

Найдите углы между плоскостью A_1AC и следующими прямыми:

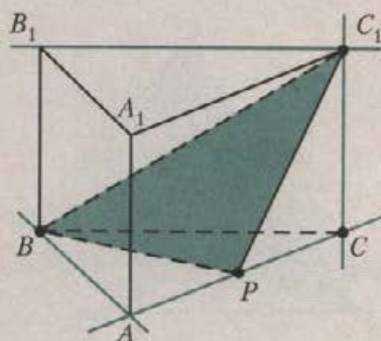
а) BC ; б) BC_1 ; в) BC_2 , точка C_2 которой — середина ребра CC_1 ; г) BP , точка P которой — середина ребра B_1C_1 .



2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в 2 раза меньше стороны ее основания. Точка P — середина ребра AC .

Найдите углы между плоскостью BC_1P и следующими прямыми:

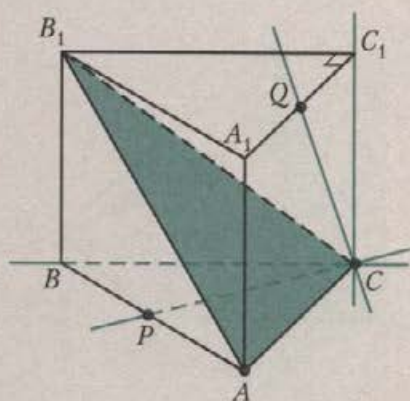
а) B_1C_1 ; б) CC_1 ; в) AC ; г) AB .



3. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник, у которого $AC = BC$. Боковое ребро призмы также равно стороне BC .

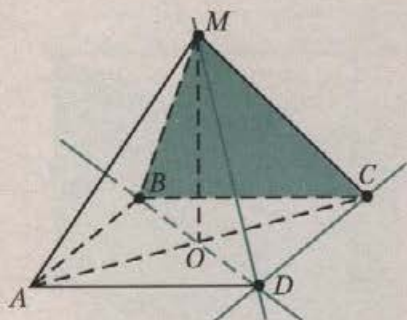
Найдите углы между плоскостью AB_1C и следующими прямыми:

а) CC_1 ; б) BC ; в) CP , точка P которой — середина ребра AB ; г) CQ , точка Q которой — середина ребра A_1C_1 .



Задание 91

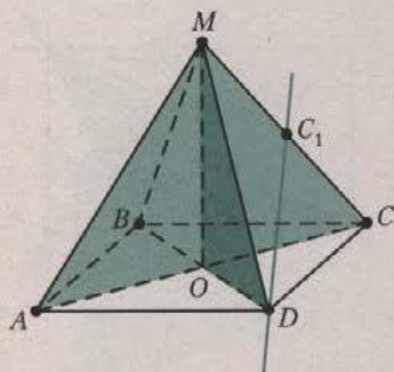
Найдите угол между заданной прямой и заданной плоскостью.



1. Отношение бокового ребра правильной пирамиды $MABCD$ к стороне ее основания равно $\sqrt{5} : 2$.

Найдите углы между плоскостью MBC и следующими прямыми:

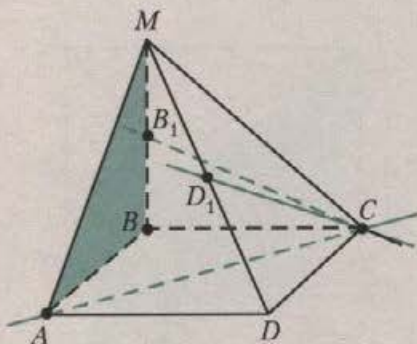
а) CD ; б) MD ; в) BD .



2. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна половине диагонали ее основания. Точка C_1 — середина ребра MC .

Найдите углы между прямой DC_1 и следующими плоскостями:

а) MAC ; б) MDB ; в) MBC .



3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а ее боковое ребро MB равно стороне основания и перпендикулярно плоскости основания.

Найдите углы между плоскостью MAB и следующими прямыми:

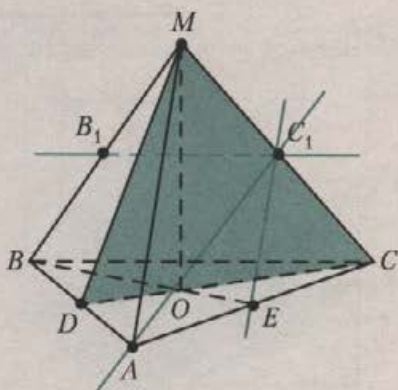
а) AC ; б) B_1C , точка B_1 которой — середина ребра MB ; в) CD_1 , точка D_1 которой — середина ребра MD .

Найдите угол между заданной прямой и заданной плоскостью.

1. Высота правильной пирамиды $MABC$ равна медиане ее основания. Точки D и C_1 — середины соответственно ребер AB и MC .

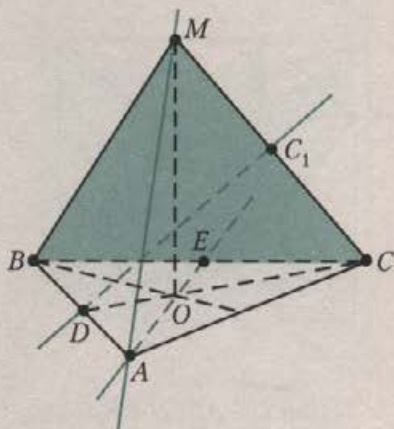
Найдите углы между плоскостью MCD и следующими прямыми:

а) B_1C_1 , точка B_1 которой — середина ребра MB ; б) AC_1 ; в) EC_1 , точка E которой — середина ребра AC .



2. В правильном тетраэдре $MABC$ точки D , E и C_1 — середины соответственно ребер AB , BC и MC . Найдите углы между плоскостью MBC и следующими прямыми:

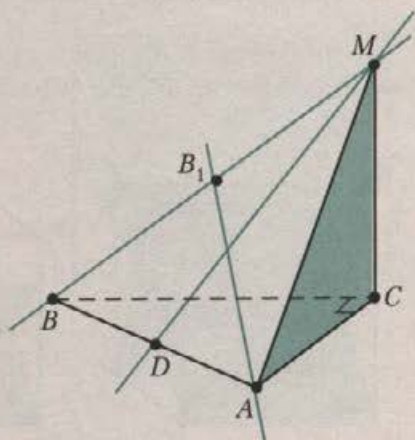
а) MA ; б) AE ; в) DC_1 .



3. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник, ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и $AC = BC = MC$.

Найдите углы между плоскостью MAC и следующими прямыми:

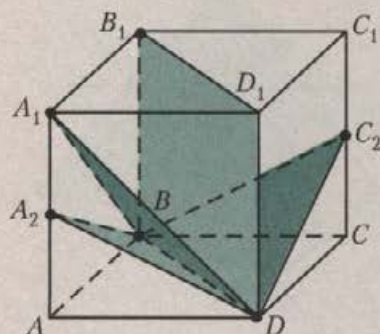
а) MB ; б) MD , точка D которой — середина ребра AB ; в) AB_1 , точка B_1 которой — середина ребра MB .



22. Вычисление угла между плоскостями

Задание 93

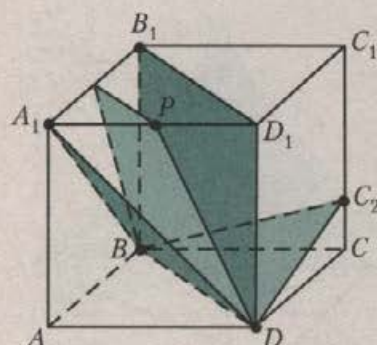
Найдите угол между заданными плоскостями.



1. Точка C_2 — середина ребра CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите углы между плоскостью BDC_2 и следующими плоскостями:

а) B_1BD ; б) A_1BD ; в) A_2BD , точка A_2 которой — середина ребра AA_1 .



2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

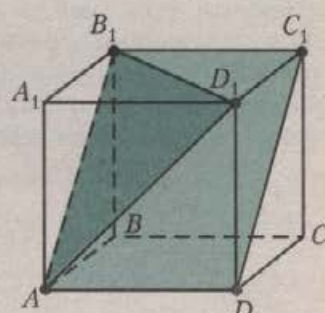
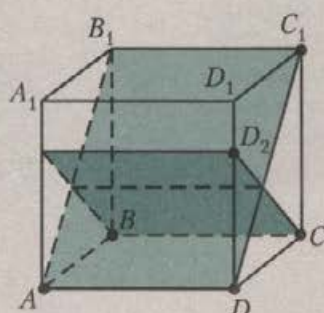
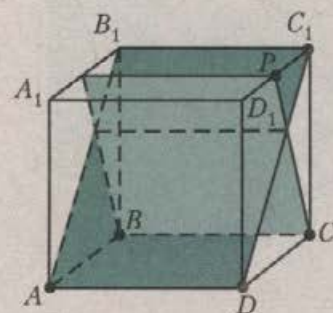
Найдите углы между плоскостью A_1BD и следующими плоскостями:

а) B_1BD ; б) BDP , точка P которой — середина ребра A_1D_1 ; в) BDC_2 , точка C_2 которой — такая точка ребра CC_1 , что $CC_2 : CC_1 = 1 : 4$.

3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите углы между его диагональной плоскостью ADC_1 и следующими плоскостями:

а) B_1CP , точка P которой — середина ребра C_1D_1 ; б) BCD_2 , точка D_2 которой — такая точка ребра DD_1 , что $DD_2 : DD_1 = 3 : 4$; в) AB_1D_1 .

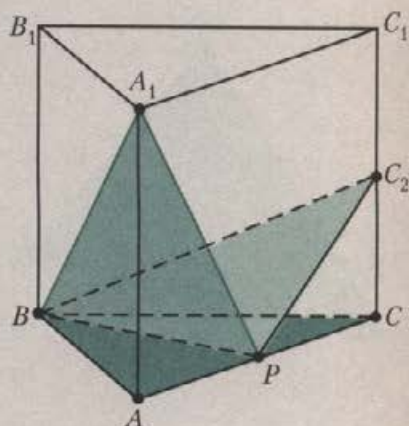


Найдите угол между заданными плоскостями.

1. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. Точки P и C_2 — середины соответственно ребер AC и CC_1 .

Найдите углы между плоскостью BPC_2 и следующими плоскостями:

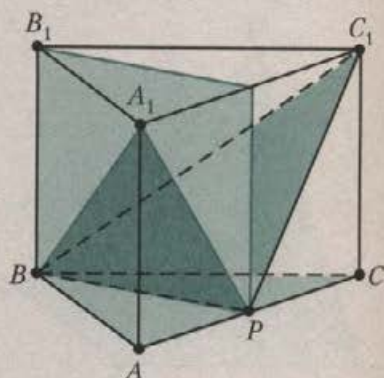
а) ABC ; б) ACC_1 ; в) A_1BP .



2. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. Точка P — середина ребра AC .

Найдите углы между плоскостью C_1BP и следующими плоскостями:

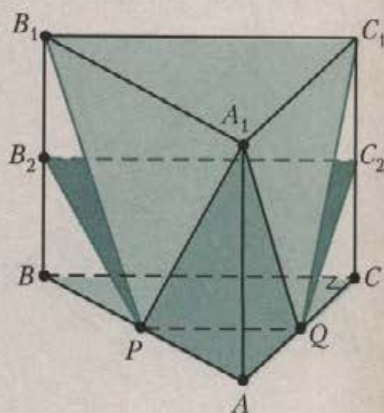
а) ABC ; б) B_1BP ; в) A_1BP .



3. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом при вершине C , и $AC = BC = CC_1$. Точки P и Q — середины соответственно ребер AB и AC .

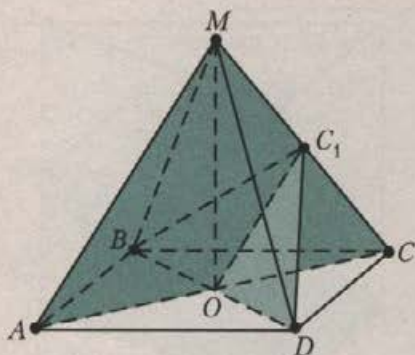
Найдите углы между плоскостью A_1PQ и следующими плоскостями:

а) ABC ; б) B_1PQ ; в) B_2PQ , точка B_2 которой — середина ребра BB_1 .



Задание 95

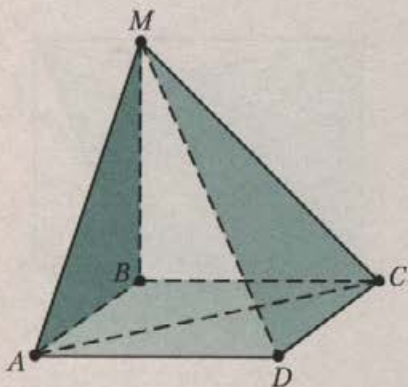
Найдите угол между заданными плоскостями.



1. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна диагонали ее основания. Точка C_1 — середина ребра MC .

Найдите углы между следующими плоскостями:

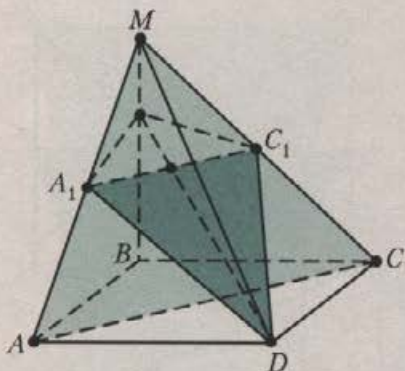
- а) BDC_1 и MAC ; б) BDC_1 и MDB ;
в) MBC и MCD .



2. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : BC = 1 : 2$, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне AB .

Найдите углы между плоскостью ABC и следующими плоскостями:

- а) MAB ; б) MCD ; в) MAC .



3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

Найдите углы между плоскостью MAC и следующими плоскостями:

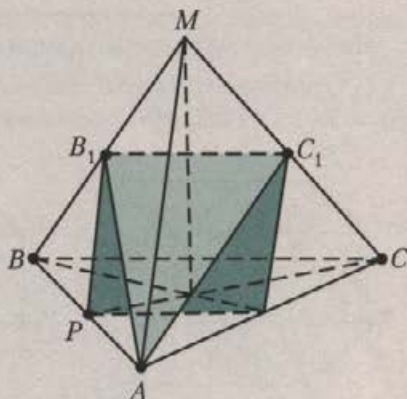
- а) MAB ; б) MCD ; в) A_1C_1D , точки A_1 и C_1 которой — середины соответственно ребер MA и MC .

Найдите угол между заданными плоскостями.

1. На ребрах MB и MC правильного тетраэдра $MAVC$ взяты соответственно точки B_1 и C_1 — середины этих ребер.

Найдите углы между плоскостью AB_1C_1 и следующими плоскостями:

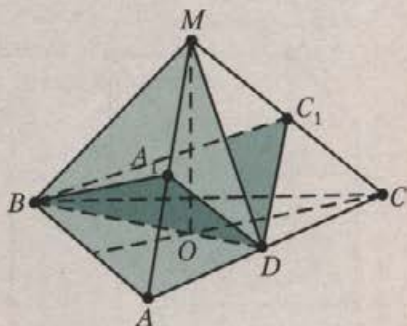
а) ABC ; б) MBC ; в) PB_1C_1 , точка P которой — середина ребра AB .



2. Высота MO правильной пирамиды $MAVC$ равна стороне ее основания. Точки C_1 и D — середины соответственно ребер MC и AC .

Найдите углы между плоскостью BC_1D и следующими плоскостями:

а) ABC ; б) MDB ; в) A_1BD , точка A_1 которой — середина ребра MA .

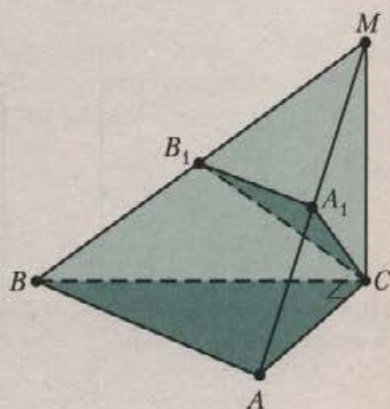


3. В основании пирамиды $MAVC$ лежит равнобедренный треугольник, угол ACB которого равен 90° .

Боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания и равно AC .

Найдите углы между плоскостью MAV и следующими плоскостями:

а) MBC ; б) ABC ; в) CA_1B_1 , точки A_1 и B_1 которой — середины соответственно ребер MA и MB .

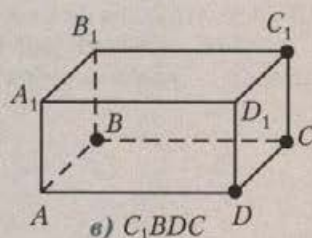
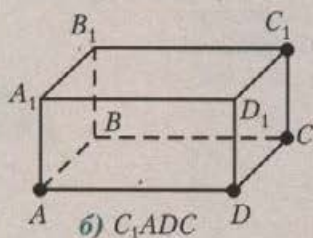
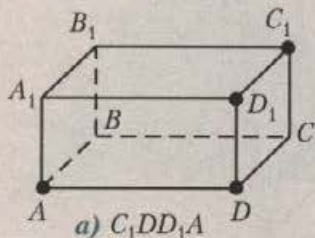


23. Вычисление двугранного угла

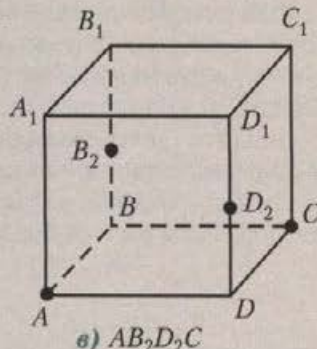
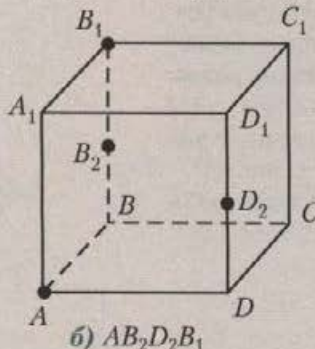
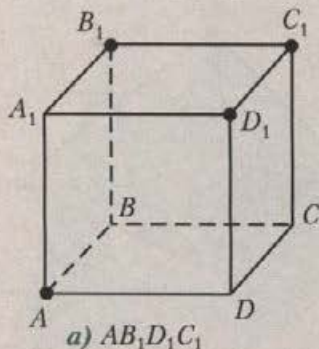
Задание 97

Найдите указанные двугранные углы.

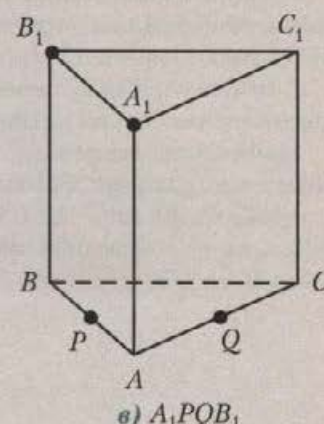
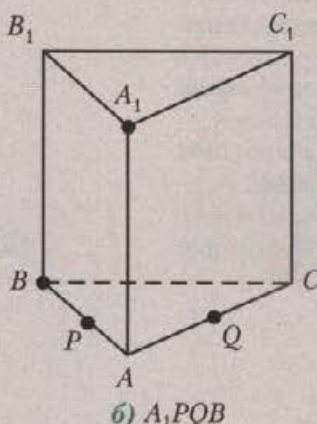
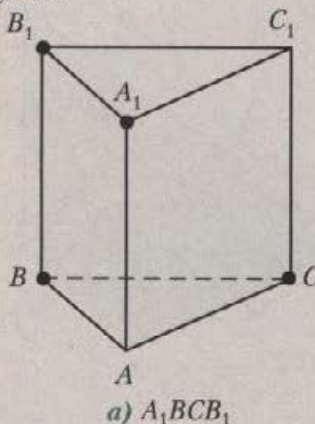
1. Отношение ребер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно $2 : 3 : 1$. Найдите следующие двугранные углы:



2. На ребрах BB_1 и DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки B_2 и D_2 — середины этих ребер. Найдите следующие двугранные углы:

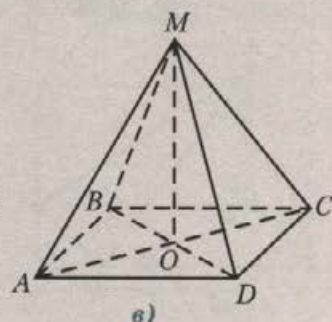
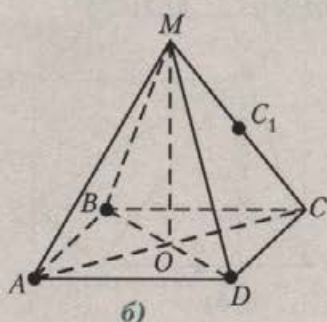
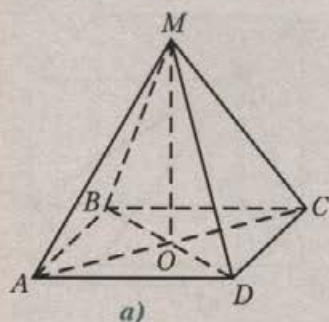


3. Боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ — квадраты. На ее ребрах AB и BC взяты соответственно точки P и Q — середины этих ребер. Найдите следующие двугранные углы:



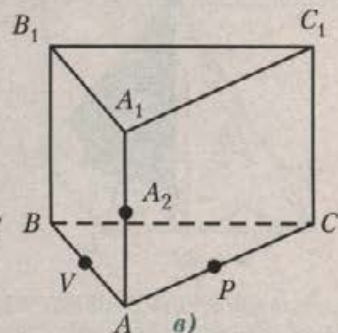
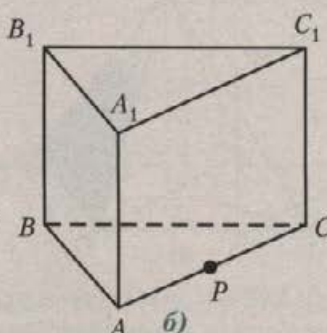
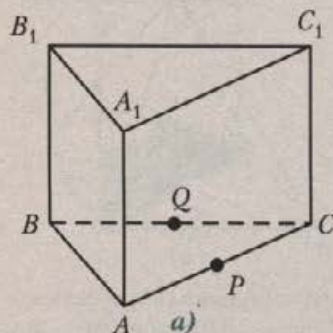
Найдите указанные двугранные углы.

1. Высота правильной пирамиды $MABCD$ равна стороне ее основания. Найдите следующие двугранные углы: а) при ребре основания; б) C_1BDA , где точка C_1 — середина ребра MC ; в) при боковом ребре.

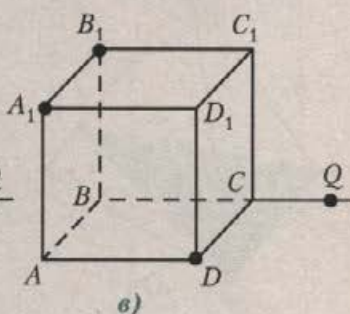
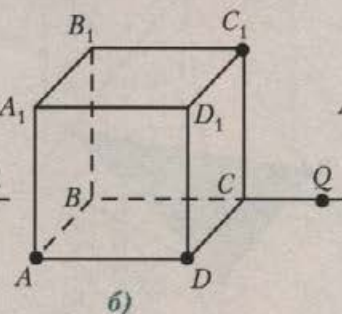
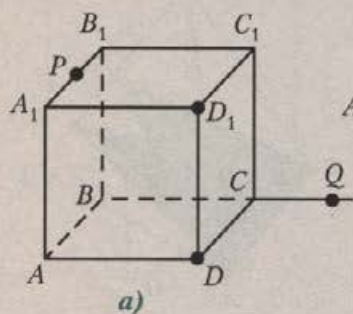


2. Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a . Точки P , Q и V — середины соответственно ребер AC , BC и AB . Найдите следующие двугранные углы:

а) C_1PQA ; б) C_1BQA_1 ; в) C_1VQA_2 , где точка A_2 — середина ребра CC_1 .

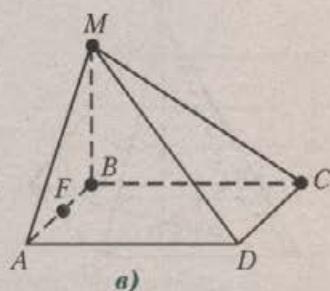
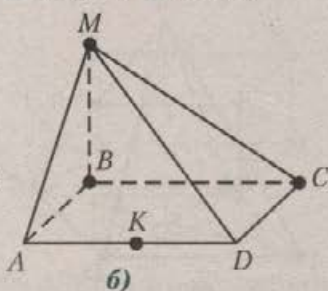
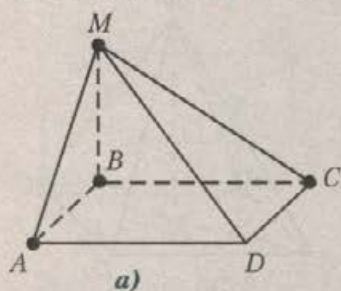


3. На продолжении ребра BC куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ взята точка Q , такая, что $BQ : BC = 3 : 2$, причем точка C лежит между точками B и Q . Найдите следующие двугранные углы: а) QDD_1P , где точка P — середина ребра A_1B_1 ; б) QC_1DA ; в) QA_1DB_1 .

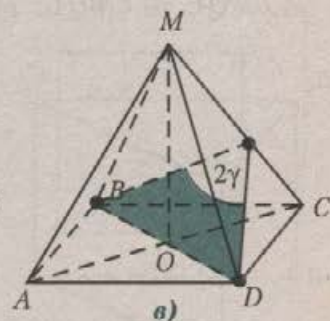
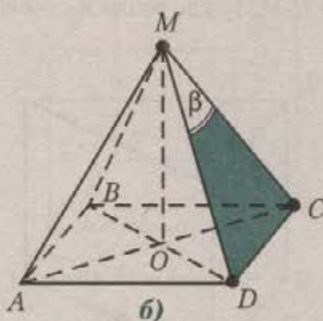
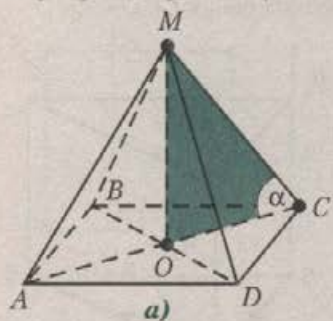


Найдите указанные двугранные углы.

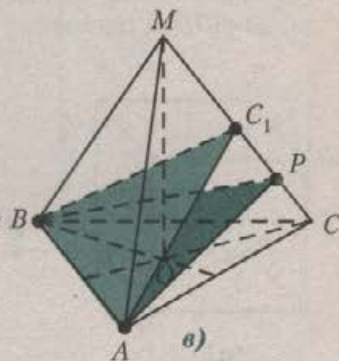
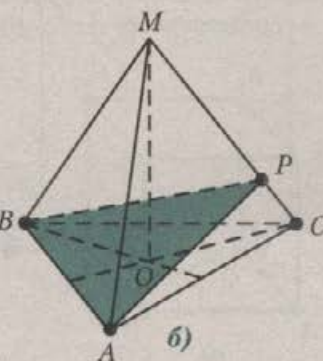
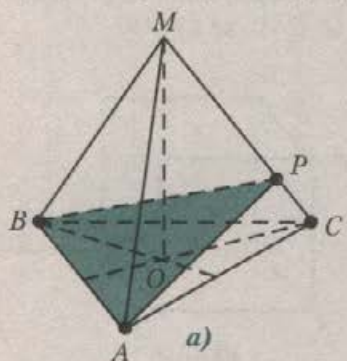
1. Основанием пирамиды $MABCD$ является прямоугольник, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и $AB : AD : MB = 1 : 2 : 1$. На ребрах AD и AB взяты соответственно точки K и F — середины этих ребер. Найдите следующие двугранные углы: а) $MACB$; б) $MCKB$; в) $MCFB$.



2. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной пирамиды $MABCD$ в следующих случаях: а) $MCO = \alpha$; б) $CMD = \beta$; в) двугранный угол при боковом ребре MC равен 2γ .

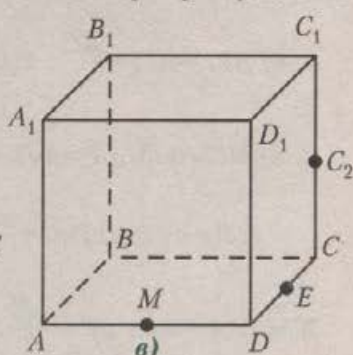
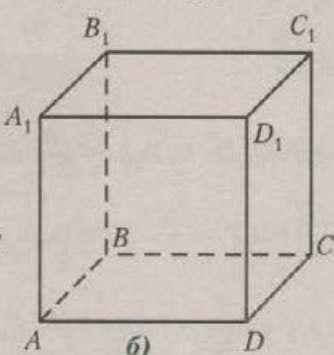
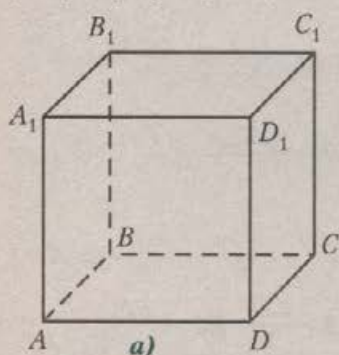


3. В правильной пирамиде $MABC$ боковое ребро в два раза больше стороны основания. На ребре MC взята точка P , такая, что секущая плоскость ABP перпендикулярна прямой MC . Найдите следующие двугранные углы: а) $BAPC$; б) $PABC$; в) C_1ABP , где точка C_1 — середина ребра MC .

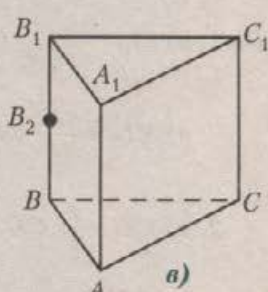
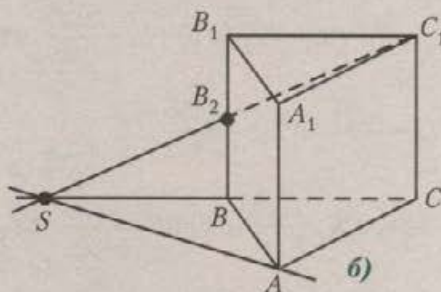
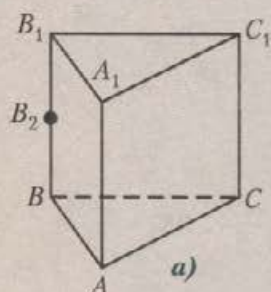


Найдите указанные двугранные углы.

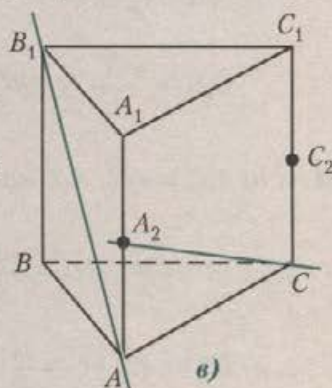
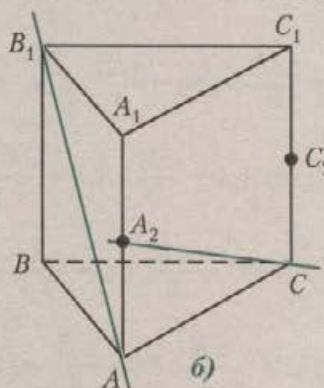
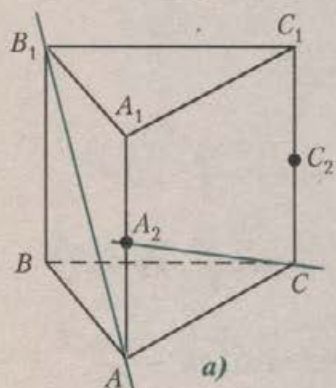
1. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Найдите следующие двугранные углы: а) A_1C_1DA ; б) AB_1DD_1 ; в) AC_2EM , где точки C_2 , E и M — середины соответственно ребер CC_1 , CD и AD .



2. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне основания. На ребре BB_1 взята точка B_2 — середина его. Найдите следующие двугранные углы: а) CAC_1B_2 ; б) C_1SAC , где $S_1 = C_1B_2 \cap BC$; в) C_1AB_2B .



3. На ребрах AA_1 и CC_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты соответственно точки A_2 и C_2 — середины этих ребер. Угол между прямыми AB_1 и CA_2 равен 90° . Найдите следующие двугранные углы: а) C_2ABC ; б) BAC_2C ; в) B_1AC_2C .



ОТВЕТЫ

59. 1. а) $MB = a$, $MP = BP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; б) $BC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $C_1P = \frac{a}{2}$.

в) $AB_1 = AC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $B_1C_1 = \frac{a}{2}$.

2. а) $MC = a\sqrt{5}$, $CP = a\sqrt{2}$, $MP = a\sqrt{3}$; б) $D_1P = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $CD_1 = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

$CP = a\sqrt{2}$; в) $D_2C = \frac{a\sqrt{14}}{4}$, $D_2P = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, $CP = a\sqrt{2}$.

3. а) $MA = a\sqrt{2}$, $AP = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $MP = \frac{a\sqrt{7}}{2}$; б) $BP = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $C_1P = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BC_1 = \frac{a\sqrt{6}}{2}$;

в) $BP = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $BC_2 = \frac{a\sqrt{26}}{4}$, $PC_2 = \frac{a}{2}$.

60. 1. а) $CL_1 = \frac{a\sqrt{29}}{2}$, $CL_2 = \frac{3a}{2}$, $CL_3 = \frac{a\sqrt{53}}{4}$; б) $PL_1 = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$, $PL_2 = a\sqrt{2}$, $PL_3 = \frac{a\sqrt{26}}{2}$;

в) $A'L_1 = \frac{a\sqrt{69}}{4}$, $A'L_2 = \frac{a\sqrt{21}}{2}$, $A'L_3 = \frac{a\sqrt{109}}{4}$.

2. а) $CK_1 = \frac{a}{2}$, $CK_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $CK_3 = \frac{a\sqrt{21}}{6}$; б) $BK_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BK_2 = \frac{a\sqrt{30}}{6}$, $BK_3 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$;

в) $A_1K_1 = a$, $A_1K_2 = \frac{a\sqrt{30}}{6}$, $A_1K_3 = \frac{a\sqrt{30}}{6}$.

3. а) $CN_1 = \frac{a\sqrt{41}}{8}$, $CN_2 = \frac{a\sqrt{21}}{4}$, $CN_3 = \frac{a\sqrt{161}}{8}$; б) $C_1N_1 = \frac{13a}{8}$, $C_1N_2 = \frac{a\sqrt{21}}{4}$,

$C_1N_3 = \frac{a\sqrt{33}}{8}$; в) $QN_1 = \frac{3a\sqrt{5}}{8}$, $QN_2 = \frac{a\sqrt{21}}{4}$, $QN_3 = \frac{a\sqrt{157}}{8}$.

61. 1. а) $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, $A_1C = a\sqrt{3}$; б) $A_1O = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $A_1F = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; в) $A_1P = \frac{3a}{2}$, $A_1Q = \frac{3a}{2}$.

2. а) $KP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $KD_2 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; б) $KD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $KC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; в) $KD' = \frac{a\sqrt{14}}{2}$, $KP' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. а) $PQ = a\sqrt{2}$, $PC_2 = \frac{3a}{2}$; б) $PK = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $PQ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; в) $PC'_1 = a\sqrt{3}$, $PK' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$62.1. a) \frac{a\sqrt{39}}{6}; б) \frac{a\sqrt{3}}{3}; в) \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{5}}{2}; б) \frac{a\sqrt{7}}{2}; в) \frac{a\sqrt{19}}{4}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{35}}{4}; б) \frac{a\sqrt{7}}{2}; в) \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

$$63.1. a) \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ и } \frac{a\sqrt{3}}{6}; б) \frac{6a}{5} \text{ и } \frac{3a}{10}; в) \frac{a}{2} \text{ и } a.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{10}}{6} \text{ и } \frac{a\sqrt{10}}{6}; б) \frac{a}{3} \text{ и } \frac{a\sqrt{34}}{6}; в) \frac{a\sqrt{46}}{6} \text{ и } \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{7}}{10} \text{ и } \frac{2a\sqrt{7}}{5}; б) \frac{2a\sqrt{2}}{5} \text{ и } \frac{2a\sqrt{2}}{5}; в) \frac{a\sqrt{23}}{5} \text{ и } \frac{a\sqrt{23}}{5}.$$

$$69.1. a) \frac{a\sqrt{5}}{5}; б) a; в) \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{21}}{6}; б) \frac{a\sqrt{3}}{2}; в) \frac{a\sqrt{410}}{20}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{6}}{2}; б) \frac{a\sqrt{145}}{5}; в) \frac{a\sqrt{42}}{3}.$$

$$70.1. a) \frac{a\sqrt{34}}{34}; б) \frac{3a\sqrt{182}}{26}; в) \frac{3a\sqrt{30}}{10}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{2}}{2}; б) \frac{a\sqrt{30}}{8}; в) \frac{a\sqrt{31}}{8}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{205}}{10}; б) \frac{a\sqrt{17}}{8}; в) \frac{3a\sqrt{10}}{20}.$$

$$71.1. a) \frac{a\sqrt{30}}{6}; б) \frac{a\sqrt{182}}{14}; в) \frac{a\sqrt{286}}{22}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{6}}{3}; б) \frac{a\sqrt{6}}{2}; в) a.$$

$$3. a) \frac{6a}{7}; б) \frac{3a}{4}; в) \frac{3a\sqrt{221}}{52}.$$

$$72.1. a) \frac{a\sqrt{30}}{8}; б) \frac{a\sqrt{14}}{8}; в) \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{5}}{2}; б) \frac{a\sqrt{14}}{4}; в) \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{6}}{2}; б) \frac{3a\sqrt{5}}{5}; в) \frac{a\sqrt{266}}{14}.$$

$$77.1. a) \frac{a\sqrt{3}}{3}; б) a; в) \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$2. a) \frac{2a}{3}; б) \frac{2a\sqrt{6}}{3}; в) \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{22}}{11}; б) \frac{a\sqrt{22}}{11}. \text{ Указание. Так как } MA \parallel C_1E, \text{ то прямая } MA \text{ параллельна плоскости } BC_1E. \text{ Тогда расстояние от любой точки прямой } MA \text{ до плоскости } BC_1E \text{ одно и то же. Найдите расстояние от точки } A_1 - \text{ середины ребра } MA - \text{ до плоскости } BC_1E.$$

$$в) \frac{a\sqrt{22}}{22}. \text{ Указание. } B_1D \parallel MA \text{ и } MA \parallel C_1E. \text{ Тогда } B_1D \parallel C_1E. \text{ Найдите расстояние от точки } K - \text{ середины отрезка } B_1D - \text{ до плоскости } BC_1E; з) \frac{a\sqrt{22}}{22}.$$

$$78.1. a) \frac{4a\sqrt{17}}{17}; б) \frac{a\sqrt{17}}{17}; в) \frac{2a\sqrt{17}}{17}; з) \frac{2a\sqrt{34}}{17}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{6}}{4}; б) \frac{a\sqrt{6}}{12}; в) \frac{a\sqrt{6}}{12}; з) \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{15}}{12}; б) \frac{a\sqrt{15}}{36}; в) \frac{a\sqrt{15}}{12}; з) \frac{a\sqrt{15}}{12}.$$

$$79.1. a) \frac{2a\sqrt{33}}{11}; б) \frac{4a\sqrt{33}}{33}; в) \frac{2a\sqrt{33}}{33}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{10}}{5}; б) \frac{a\sqrt{10}}{5}; в) \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{2}}{4}; б) \frac{a\sqrt{2}}{2}; в) \frac{a\sqrt{2}}{8}.$$

$$80.1. a) \frac{a\sqrt{5}}{5}; б) \frac{a\sqrt{5}}{5}; в) \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$2. a) \frac{2a\sqrt{5}}{5}; б) \frac{2a\sqrt{5}}{5}; в) \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{5}}{3}; б) \frac{a\sqrt{5}}{6}; в) \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

$$81. 1. a) \frac{a}{2}; б) \frac{a\sqrt{2}}{4}; в) \frac{a\sqrt{2}}{4}; г) \frac{a\sqrt{5}}{5}; д) \frac{a\sqrt{5}}{5}; е) \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$2. a) a; б) a; в) \frac{a\sqrt{6}}{6}; г) \frac{a}{3}; д) \frac{a\sqrt{17}}{17}; е) \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

$$3. a) a; б) a; в) \frac{a\sqrt{6}}{6}; г) \frac{a\sqrt{6}}{6}; д) \frac{a\sqrt{5}}{4}; е) \frac{a}{3}.$$

$$82. 1. a) \frac{2a\sqrt{2}}{3}; б) \frac{a\sqrt{2}}{3}; в) \frac{a\sqrt{10}}{5}; г) \frac{a\sqrt{10}}{5}; д) \frac{a\sqrt{10}}{5}; е) \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$2. a) a; б) \frac{3a\sqrt{19}}{38}; в) \frac{3a\sqrt{19}}{19}; г) \frac{3a\sqrt{19}}{19}; д) \frac{3a\sqrt{19}}{19}; е) \frac{3a\sqrt{46}}{46}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{2}}{6}; б) \frac{a\sqrt{6}}{6}; в) \frac{3a\sqrt{34}}{34}; г) \frac{a\sqrt{51}}{102}; д) \frac{a\sqrt{14}}{28}; е) \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$83. 1. a) \frac{2a\sqrt{5}}{5}; б) \frac{a\sqrt{5}}{5}; в) \frac{a\sqrt{5}}{5}; г) \frac{a\sqrt{5}}{5}; д) \frac{a\sqrt{2}}{4}; е) \frac{a\sqrt{3}}{3}; ж) \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$2. a) \frac{a\sqrt{3}}{2}; б) \frac{a\sqrt{2}}{4}; в) \frac{a\sqrt{21}}{7}; г) \frac{a\sqrt{21}}{14}; д) \frac{a\sqrt{30}}{20}; е) \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$3. a) \frac{a}{2}; б) \frac{a}{2}; в) \frac{a\sqrt{6}}{3}; г) \frac{a\sqrt{6}}{6}; д) a; е) \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$84. 1. a) \frac{a\sqrt{2}}{2}; б) \frac{a\sqrt{6}}{6}; в) \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$2. a) \frac{3a\sqrt{13}}{13}; б) \frac{3a\sqrt{13}}{26}; в) \frac{3a}{7}.$$

$$3. a) \frac{a\sqrt{2}}{2}; б) \frac{a\sqrt{2}}{2}; в) \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$85. 1. a) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}; б) \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}; в) \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}; г) 90^\circ; д) \arccos \frac{5\sqrt{3}}{12}; е) 90^\circ.$$

$$2. a) \operatorname{arctg} \sqrt{5}; б) 30^\circ; в) \arccos \frac{7\sqrt{6}}{18}; г) \arccos \frac{\sqrt{30}}{10}; д) 30^\circ; е) 90^\circ.$$

$$3. a) \arccos \frac{4\sqrt{110}}{55}; б) \arccos \frac{\sqrt{11}}{11}; в) \arccos \frac{7\sqrt{143}}{143}; г) \arccos \frac{17\sqrt{407}}{407}.$$

$$86. 1. a) 90^\circ; б) \arccos \frac{\sqrt{42}}{14}; в) \arccos \frac{2\sqrt{105}}{35}; г) \arccos \frac{5\sqrt{14}}{42}.$$

$$2. a) 90^\circ; б) \arccos \frac{\sqrt{5}}{10}; в) \arccos \frac{3}{5}; г) \arccos \frac{7}{10}.$$

$$3. a) \arccos \frac{\sqrt{6}}{6}; б) \arccos \frac{\sqrt{30}}{10}; в) \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}; г) \arccos \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

$$87. 1. a) \arccos \frac{1}{4}; б) 90^\circ; в) \arccos \frac{3}{8}.$$

$$2. a) 90^\circ; б) \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}; в) \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$3. a) \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}; б) \arccos \frac{1}{6}; в) \arccos \frac{1}{6}.$$

$$88. 1. a) 90^\circ; б) 90^\circ; в) \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$2. a) \arccos \frac{\sqrt{39}}{26}; б) \arccos \frac{\sqrt{13}}{26}; в) \arccos \frac{4\sqrt{130}}{65}.$$

$$3. a) \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}; б) 60^\circ; в) 60^\circ.$$

$$89. 1. a) 0^\circ; б) 30^\circ; в) \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$2. a) \arctg 2; б) \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10}; в) \arcsin \frac{\sqrt{10}}{5}; г) \arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}; д) \arcsin \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

$$3. a) \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}; б) \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}; в) \arccos \frac{7\sqrt{3}}{18}; г) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}. \text{ Указание. Искомый угол}$$

равен углу между плоскостью AB_2C_1 и прямой B_2C_2 , точка C_2 которой — середина ребра CC_1 .

$$90. 1. a) 60^\circ; б) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}; в) \arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}; г) \arcsin \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

$$2. a) \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}; б) 45^\circ; в) 45^\circ; г) \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$3. a) 45^\circ; б) 45^\circ; в) 30^\circ; г) \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$91.1. a) 60^\circ; б) \arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}; в) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$2. a) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}; б) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}; в) \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$3. a) 45^\circ; б) \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5}; в) \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$92.1. a) 30^\circ; б) \arcsin \frac{2\sqrt{111}}{37}; в) \arcsin \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

$$2. a) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}; б) \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}; в) \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$3. a) 45^\circ; б) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}; в) \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$93.1. a) \operatorname{arctg} \sqrt{2}; б) 90^\circ; в) \arccos \frac{1}{3}.$$

$$2. a) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}; б) \arccos \frac{5\sqrt{3}}{9}; в) \arccos \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

$$3. a) \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}; б) \arccos \frac{\sqrt{30}}{10}; в) \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$94.1. a) \operatorname{arctg} 2; б) 90^\circ; в) \arccos \frac{7\sqrt{85}}{85}.$$

$$2. a) \operatorname{arctg} 2; б) \operatorname{arctg} \frac{1}{2}; в) \arccos \frac{3}{5}.$$

$$3. a) \operatorname{arctg} 2; б) \arccos \frac{3}{5}; в) \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$95.1. a) 90^\circ; б) \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}; в) \arccos \frac{1}{9}.$$

$$2. a) 90^\circ; б) \operatorname{arctg} \frac{1}{2}; в) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$3. a) \operatorname{arctg} \sqrt{2}; б) \arccos \frac{13\sqrt{6}}{36}; в) \arccos \frac{5\sqrt{33}}{33}.$$

$$96. 1. a) \arccos \frac{5\sqrt{33}}{33}; б) \arccos \frac{\sqrt{33}}{33}; в) \arccos \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

$$2. a) \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}; б) \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}; в) \arccos \frac{3}{5}.$$

$$3. a) \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}; б) \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}; в) \arccos \frac{1}{3}.$$

$$97. 1. a) 90^\circ; б) \operatorname{arctg} \frac{1}{2}; в) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

$$2. a) \operatorname{arctg} (-\sqrt{2}); б) \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right); в) \arccos \left(-\frac{1}{3}\right).$$

$$3. a) \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}; б) \operatorname{arctg} \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right); в) \arccos \frac{13}{19}.$$

$$98. 1. a) \operatorname{arctg} 2; б) \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right); в) \arccos \left(-\frac{1}{5}\right).$$

$$2. a) \arccos \left(-\frac{\sqrt{57}}{19}\right); б) \arccos \frac{3}{5}; в) \arccos \frac{5\sqrt{133}}{133}.$$

$$3. a) 90^\circ; б) \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right); в) \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$99. 1. a) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}; б) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}; в) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$2. a) \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha); б) \arccos \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right); в) \arccos \sqrt{-\cos 2\gamma}.$$

$$3. a) 90^\circ; б) \arccos \frac{\sqrt{33}}{6}; в) \arccos \frac{\sqrt{55}}{10}.$$

$$100. 1. a) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}; б) \arccos \left(-\frac{1}{2}\right); в) \arccos \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

$$2. a) 90^\circ; б) 45^\circ; в) \arccos \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

$$3. a) 30^\circ; б) \arccos \frac{1}{4}; в) \arccos \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

Указание. В плоскости ABB_1 через точку A_2 проведите прямую AB_1 и найдите точку D , в которой проведенная прямая пересекает AB . Выразите двумя способами расстояние CD и найдите боковое ребро призмы (оно равно стороне основания).

Сводный список аксиом и теорем по курсу геометрии 10 класса

- Аксиома 1.** Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.
- Аксиома 2.** Если три точки не лежат на одной прямой, то через них проходит плоскость, и притом только одна.
- Аксиома 3.** Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
- Аксиома 4.** Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
- Теорема 1.** Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
- Теорема 2.** Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.
- Теорема 3.** Две параллельные прямые лежат в одной плоскости.
- Теорема 4.** Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.
- Теорема 5.** Если прямая пересекает две данные параллельные прямые, то она лежит в плоскости, определяемой этими прямыми.
- Теорема 6 (признак параллельности прямых).** Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.
- Теорема 7 (признак скрещивающихся прямых).** Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то указанные прямые скрещиваются.
- Теорема 8 (признак параллельности прямой и плоскости).** Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
- Теорема 9 (обратная теореме 8).** Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то линия пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.
- Теорема 10 (признак параллельности плоскостей).** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
- Теорема 11 (свойство параллельных плоскостей).** Если две плоскости параллельны, то и линии их пересечения третьей плоскостью параллельны.
- Теорема 12 (признак параллельности плоскостей).** Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.

- Теорема 13.** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна ей.
- Теорема 14.** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.
- Теорема 15.** Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.
- Теорема 16.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, то она перпендикулярна каждой прямой, принадлежащей плоскости, определяемой этими пересекающимися прямыми.
- Следствие 1 (признак перпендикулярности прямой и плоскости).** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, то она перпендикулярна плоскости, определяемой этими пересекающимися прямыми.
- Следствие 2.** Если данная прямая перпендикулярна плоскости, то любая прямая этой плоскости перпендикулярна данной прямой.
- Теорема 17.** Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.
- Теорема 18.** При параллельном проектировании отношение длин параллельных отрезков сохраняется.
- Теорема 19.** Если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.
- Теорема 20 (признак перпендикулярности плоскостей).** Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Что вы будете изучать в 11 классе

Перечислим основные темы, которые вы будете изучать в курсе стереометрии 11 класса.

1. Метод координат и его применение при решении задач.
2. Векторы. Координаты векторов. Действия над векторами. Векторно-координатный метод решения вычислительных задач.
3. Площадь сечения многогранника.
4. Правильные и полуправильные многогранники.
5. Площадь поверхности многогранника.
6. Объемы многогранников.
7. Тела вращения.
8. Объемы и поверхности тел вращения.
9. Комбинации многогранников и тел вращения.
10. Комбинации многогранников.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Модель поверхности (задания 1, 2)	3
2. Модель многогранника (задания 3—6)	7
3. Развертка пирамиды. Модель пирамиды (задания 7—15)	15
4. Построение сечения пирамиды (задания 16—22)	26
5. Построение пересечения прямых и плоскостей (задания 23—25)	33
6. Построение прямой, параллельной заданной прямой (задания 26—28)	36
7. Развертка призмы. Модель призмы (задания 29—31)	39
8. Построение сечения призмы (задания 32—37)	45
9. Построение прямой, параллельной заданной прямой (задания 38—41)	51
10. Построение сечений, параллельных заданным прямым и плоскостям (задания 42—46)	55
11. Построение угла между скрещивающимися прямыми (задание 47)	60
12. Модели заданных многогранников (задания 48—58)	61
13. Вычисление расстояния между двумя точками (задания 59—63)	74
14. Деление отрезка в данном отношении (задание 64)	79
15. Построение перпендикуляра к прямой (задания 65—68)	80
16. Вычисление расстояния от точки до прямой (задания 69—72)	84
17. Построение перпендикуляра к плоскости (задания 73—76)	88

18. Вычисление расстояния от точки до плоскости (задания 77—80)	92
19. Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми (задания 81—84)	96
20. Вычисление угла между скрещивающимися прямыми (задания 85—88)	100
21. Вычисление угла между прямой и плоскостью (задания 89—92)	104
22. Вычисление угла между плоскостями (задания 93—96)	108
23. Вычисление двугранного угла (задания 97—100)	112
Ответы	116
Сводный список аксиом и теорем по курсу геометрии 10 класса	123
Что вы будете изучать в 11 классе	125